TEMEL TANECİKLER

DERS NOTLARI

PROF. DR. GEDİZ AKDENİZ

BÖLÜM II

II.6 HADRONLAR VE ÖZELLİKLERİ

Kuvvetli etkileşimleri hadronlar yapar. Hadronlar; 1)Baryonlar (yarım spinli; Bose-Einstein istatistiğine uyarlar.) 2)Mezonlar (tam spinli; Fermi-Dirac istatistiğine uyarlar.) Şimdi bazı mezonların ve baryonların özelliklerini tablolar halinde gözden geçirelim.

MESONLAR:	I_3	**S(strange quark)**	**Quark yapısı**
(Pion) p^-, p^0, p^+	-1,0,+1	0	$u\bar{d}, d\bar{u}, \frac{u\bar{u}-d\bar{d}}{\sqrt{2}}$
(Müon) μ	0	0	$\frac{u\bar{u}+d\bar{d}-2s\bar{s}}{\sqrt{6}}$
(Kaon) K^0, K^+	-1/2,+1/2	1	$d\bar{s}, u\bar{s}$
$K^-, \bar{K}^0$	-1/2,+1/2	-1	$s\bar{u}, s\bar{d}$

Bütün mesonların spini 0 dır. (S=0)

BARYONLAR	I_3	**S(strange quark)**	**Quark yapısı**
P,n	½ -1/2	0	uud, udd
$\Sigma^-, \Sigma^0, \Sigma^+$	-1,0,+1	-1	uud, udd
Λ	0	-1	uud, udd
Ξ^-, Ξ^0	-1/2,1/2	-2	uud, udd
$\Delta^-, \Delta^0, \Delta^+, \Delta^{++}$	-3/2,-1/2,1/2,3/2	0	sss
$\Sigma^{*-}, \Sigma^{*0}, \Sigma^{*+}$	-1,0,1	-1	sss
Ξ^{*-}, Ξ^{*0}	-1/2,1/2	-2	sss
Ω^-	0	-3	sss

BÖLÜM II

II.7 ETKİLEŞME ÖRNEKLERİ

Bu reaksiyonları incelerken ve etkileşme tiplerini belirlerken takip edilecek sıra şöyle olmalıdır. Önce yük korunumuna, Baryon sayısına korunumuna, acaiplik korunumuna ve sonra L_{e}, L_{m}, L_{t} lepton korunumuna bakılır. Bunların yanısıra reaksiyonun gerçekleşmesi için reaksiyonda momentum-enerji korunumunun olması unutulmamalıdır.

Örnekler geçmeden önce korunan birimleri etkileşmelere göre gözden geçirelim.

Korunan Birim	**Kuvvetli Etkileşme**	**EMT**	**Zayıf Etkileşme**
Elektrik yükü (Q)	E	E	E
Baryon Sayısı (B)	E	E	E
Acayiplik Sayısı (S)	E	E	H
İzospin (I_3)	E	H	H
Hyperyük (Y=S+B)	E	E	H
Enerji Momentum Korunumu Açısal mom.	E	E	E

ÖRNEK-1.

$$\Sigma^0 \rightarrow \Lambda + \Pi^0$$

reaksiyonunu Standart model çerçevesinde inceleyiniz.

Yük korunumu (Q): 0 à 0 + 0
(B)aryon : 1 à 1 + 0
(I_3)İzospin : 0 à 0 + 0
(S)trangeness : -1 à -1 + 0
Y : 0 à 0 + 0

Olduğundan bu reaksiyon kuvetli etkileşmedir.

Not: Sadece I_3 korunmazsa, elektromanyetik (EM) etkileşimdir.Yük ve Baryon sayısı mutlaka korunacak (giren quark kadar çıkan quark var). Yani Q ve B sayısı mutlaka korunacak.Sadece ikisi yanında, I_3, S ve Y korunmuyorsa zayıf etkileşmedir.

ÖRNEK-2.

$\Sigma^{-} \to n + \Pi^{-}$ reaksiyonunu Standart model çerçevesinde inceleyiniz.

Q : -1 **à** 0+(-1)
B : 1 **à** 1+0
I_3: -1 **à** -1/2 –1 Korunmuyor.
S : -1 **à** 0 + 0 Korunmuyor.

Zayıf etkileşme.

ÖRNEK-3.

$\overline{m} \to e^{-} + \overline{n}_e$ reaksiyonunu Standart model çerçevesinde inceleyiniz.

Q :-1 **à** -1+0
L_e : 0 **à** 1 –1
Lm :1 **à** 0 + 0 Korunmuyor.

Böyle bir reaksiyon hiçbir zaman gözlenmez. Müon nötrinosuna bağlı bir parçacık daha olmalı ki reaksiyon gerçekleşsin.

ÖRNEK-4.

$\Delta^{+} \to p + p^{0}$ reaksiyonunu Standart model çerçevesinde inceleyiniz.

Q : 1 **à** 1 + 0
B : 1 **à** 1 + 0
I_3 :1/2 **à** 1/2 + 0
S :0 **à** 0 + 0

Kuvetli etkileşmedir.

ÖRNEK-5.

$\overline{n}_e + p \to n + e^{+}$ reaksiyonunu Standart model çerçevesinde inceleyiniz.

Q : 0 +1 **à** 0 + 1
B : 0 +1 **à** 1 + 0
I_3 : 0 + ½ **à** -1/2 + 0
S : 0 + 0 **à** 0 + 0
L_e :-1 + 0 **à** 0 – 1

lepton ($\overline{n}_e$)olduğu için baryonu 0. I_3 korunmadığı için EM etkileşmedir.

ÖRNEK-6.

$e^{-} + p \rightarrow n_{e} + p^{0}$ reaksiyonunu Standart model çerçevesinde inceleyiniz.

Q : -1 + 1 **à** 0 + 0
B : 0 +1 **à** 0 + 0

Böyle bir reaksiyon olmaz.

ÖRNEK-7.

$p + p \rightarrow \Sigma^{+} + n + K^{0} + p^{+} + p^{0}$ reaksiyonunu Standart model çerçevesinde inceleyiniz.

Q : 1+1 **à** 1 + 0 + 0 + 1 + 0
B : 1+1 **à** 1 + 1 + 0 + 0 + 0
I_3: ½+1/2 **à** 1 - 1/2 - 1/2 + 1 + 0
S :0+0 **à** -1 + 0 + 1 + 0 + 0

Kuvvetli etkileşme.

ÖRNEK-8.

$\Lambda \rightarrow p + p^{-}$ reaksiyonunu Standart Model çerçevesinde inceleyiniz.

Q : 0 **à** +1 – 1
B : 1 **à** 1 + 0
I_3: 0 **à** ½ - 1
S : -1 **à** 0 + 0

Zayıf etkileşme.

ÖRNEK-9.

$p \rightarrow e^{+} + g$ reaksiyonunu Standart Model çerçevesinde inceleyiniz.

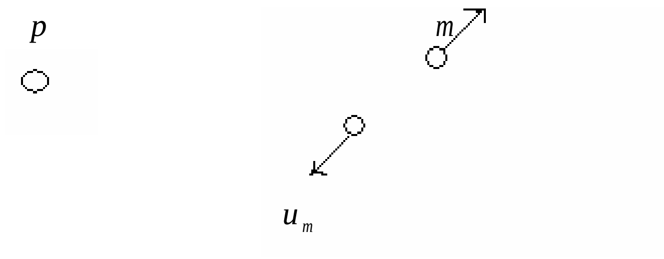
Q :1 **à** 1 + 0
B :1 **à** 0 + 0

Etkileşme görülmez.

SORU-1: Durgun haldeki bir pionun müona bozunması sırasında ortaya çıkan müonun hızını hesap ediniz**.**

$$p^{-} \rightarrow m^{-} + \overline{u}_m$$

$$p^{+} \rightarrow m^{+} + u_m \qquad \text{şeklinde bozunur}$$



Bozunmadan önce   Bozunmadan sonra

$$\vec{P}_p = \vec{P}_m + \vec{P}_u$$

$$p \rightarrow m + u_m \quad \Rightarrow \quad |\vec{P}_m| = |\vec{P}_u| \qquad \text{(Durgun pion için } \vec{P}_p = 0\text{)}$$

Soruyu çözmeden önce dörtlü vektör tanımını kısaca hatırlayalım.

$$\vec{P} = gm\vec{v} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$P^0 = gmc$$

$$E = gmc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$P^m = \left(\frac{E}{c}, P_x, P_y, P_z\right) \Rightarrow$$ **Enerji-Momentum Dörtlü Vektörü**

$$P_m P^m = \frac{E^2}{c^2} - P^2 = m^2c^2$$

$$P_m P^m = P_0 P^0 - P_i P^i$$

$$P_p \; : \left(E_p \, , \vec{0} \right)$$

$$P_m \; : \left(E_m \, , \overrightarrow{P_m} \right)$$

$$P_u \; : \left(E_u \, , \overrightarrow{P_u} \right)$$

$$P_p^2 = E^2 - P^2 c^2 = m_p^2 c^4$$

$$P_p = P_m + P_u$$

$$P_g = P_p - P_m$$

$$P_g{}^2 = P_p{}^2 + P_m{}^2 - 2 P_p P_m$$

$$m_u^2 c^4 = m_p^2 c^4 + m_m^2 c^4 - 2 P_p P_m$$

$$0 = m_p^2 c^4 + m_m^2 c^4 - 2 P_p P_m$$

$$m_p{}^2 c^4 + m_m{}^2 c^4 = 2 P_p P_m$$

$$m_p^2 c^4 + m_m^2 c^4 = 2 \left(\frac{E_p}{c} \frac{E_m}{c} \right)$$ durgun pion için $\overrightarrow{P_p} = 0$ ve dolayısıyla $E_p^2 = m_p^2 c^4$

$$m_p^2 c^2 + m_m^2 c^2 = 2 m_p E_m$$

$$E_m = \frac{m_p^2 + m_m^2}{2m_p} c^2$$

Benzer şekilde;

$$P_m = P_p - P_u$$

$$m_m^2 c^4 = m_p^2 c^4 + m_u^2 c^4 - 2 P_p P_u$$

$$m_p^2 c^2 - m_m^2 c^2 = 2\left(m_p E_u\right)$$

$$E_u = \frac{m_p^2 - m_m^2}{2m_p} c^2$$

$$E_u = \left|\vec{P}_u\right| c = \left|\vec{P}_m\right| c \qquad \left\{ \vec{P}_p = \vec{P}_m + \vec{P}_u \Rightarrow \left|\vec{P}_m\right| = \left|\vec{P}_u\right| \right\}$$

$$P_m = \frac{E_u}{c}$$

$$P_m = \frac{m_p{}^2 - m_m{}^2}{2m_p} c$$

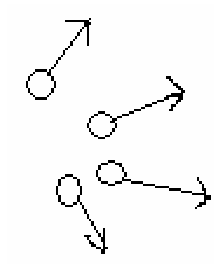
Enerjisi ve momentumunu bildiğimiz müonun hızını hesap edebiliriz.

$$\begin{array}{l} E = gmc^2 \\ \vec{P} = gm\vec{v} \end{array} \Rightarrow \frac{\vec{P}}{E} = \frac{gm\vec{v}}{gmc^2} \Rightarrow \left|\vec{v}\right| = \frac{\left|\vec{P}\right|}{E} c^2$$ bağıntısından

$$\vec{v}_m = \frac{m_p{}^2 - m_m{}^2}{m_p{}^2 + m_m{}^2} c \Rightarrow \qquad v_m = 0.271c$$ bulunur.

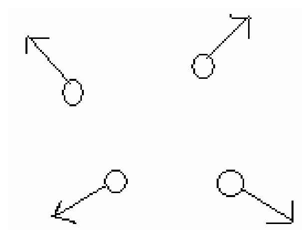
SORU 2: Duran bir protona bir proton çarparak en az bir tane proton yaratmak için gerekli olan eşik enerjisi nedir?

$$p + p \rightarrow p + p + \overline{p} + p \qquad \text{(baryon sayısı korunmalı)}$$



Çarpışmadan önce Çarpışmadan sonra

Labaratuvar sisteminde parçacıklar durgun halde bulunmadığından bu sistemde çalışmak elverişli değildir.Bunun yerine momentum merkezi (CM) sisteminde çalışmak uygundur.Oluşan dört parçacığın hepsi sistemde hareketsiz kalmalı.Çünkü toplam momentum bu sistemde (CM) sıfır.



Önce Sonra

Lab.sisteminde toplam enerji-momentum dörtlü vektörü korunumlu olduğundan çarpışma öncesi ya da sonrası değeri almam bir değişikliğe yol açmaz.Çarpışma öncesi için toplam dörtlü vektörün değeri;

$$P^{m}{}_{top} = \left[\frac{E + mc^2}{c}, \left|\vec{P}\right|, 0, 0 \right]$$

Buradaki E ve P protonun enerjisi ve momentumu,m ise protonun kütlesidir.Şimdi CM sisteminde dörtlü vektörü çarpışma sonrası için yazalım.

$$P^{m'}{}_{top} = (4m_p c, 0, 0, 0) \qquad \left\langle \begin{array}{l} \vec{P}_3 + \vec{P}_4 + \vec{P}_5 + \vec{P}_6 = 0 \\ E_3' + E_4' + E_5' + E_6' = 4m_p c \end{array} \right\rangle$$

$P^{m}{}_{top} \neq P^{m'}$ fakat $P_{mtop} P^{m}{}_{top} = P_m{}'{}_{top} P^{m'}{}_{top}$ (Dörtlü vektörün karesi her referans sisteminde invaryant)

$$\left(\frac{E}{c} + mc \right)^2 - p^2 = (4mc)^2$$

$$E^2 - P^2c^2 = m^2c^4 \Rightarrow P^2 = \frac{E^2 - m^2c^4}{c^2}$$ denklemde yerine yazarsak

$$\frac{E^2}{c^2} + m^2c^2 + 2Em - \frac{E^2}{c^2} + m^2c^2 = 16m^2c^2$$

$$E = 7mc^2$$

SORU-3:Özdeş m kütleli ve T kinetik enerjili iki parçacığın kafa kafaya çarpıştığını düşünelim. Parçacıkların göreli kinetik enerjisi ne olur?

(Kafa kafaya çarpışma)

(Sabit hedefli)

Yine benzer olarak toplam dörtlü vektörü CM sisteminde ve lab. sisteminde yazalım.

$$P^{m}{}_{top} = \left(\frac{2E}{c}, 0 \right)$$

$$P^{m'}{}_{top} = \left(\frac{E' + mc^2}{c}, P' \right)$$

$$\left(P^{m}_{top}\right)^2 = \left(P^{m'}_{top}\right)^2$$

$$\left(\frac{2E}{c}\right)^2 = \left(\frac{E'+mc^2}{c}, p'\right)^2$$

$$\frac{4E^2}{c^2} = \left(\frac{E'}{c} + mc\right)^2 - \left|\overrightarrow{P'}\right|^2$$

$$\frac{4E^2}{c^2} = \frac{E'^2}{c^2} + 2E'm + m^2c^2 - p'^2 \qquad (E = T + mc^2 \quad \text{ve} \quad E' = T' + mc^2)$$

$$2E^2 = E'mc^2 + m^2c^4$$

$$2\left(T + mc^2\right)^2 = \left(T' + mc^2\right)mc^2 + m^2c^4$$

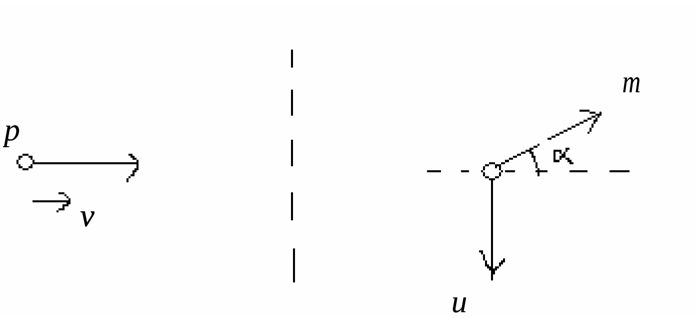
$$2T^2+4Tmc^2+2m^2c^4=T'mc^2+m^2c^4+m^2c^4$$

$$2T^2+4Tmc^2=T'mc^2$$

$$T'=\frac{2T^2+4Tmc^2}{mc^2}\Rightarrow T'=4T\left(1+\frac{T}{2mc^2}\right)$$

SORU-4: v hızıyla hareket eden bir pion bir tane müon ve müon nötrinosuna bozunmaktadır. Eğer nötrino pionun hareket yönüne göre 90° açıyla hareket ediyorsa müonun hareket açısını bulunuz.(Soru c=1 kabul edilerek çözülmüştür.)

$$p^- \rightarrow m^- + \overline{u}_m$$



$$P_p = P_u + P_m$$
$$P_u = P_p - P_m$$
$$P_m = P_p - P_u$$

$$\overrightarrow{P_m}=\overrightarrow{P_p}-\overrightarrow{P_g}$$

$$m_m^{\ 2}=m_p^{\ 2}+m_g^{\ 2}-2P_pP_g$$

$$m_m^{\ 2}=m_p^{\ 2}-2P_pP_g$$

$$m_m^{\ 2} - m_p^{\ 2} = -2P_p P_u$$

$$m_m^{\ 2} - m_p^{\ 2} = -2(E_p E_u - \overrightarrow{P_p} . \overrightarrow{P_u})$$

$$\left(\vec{P}_p . \vec{P}_u = P_p P_u \cos 90 = 0 \right)$$

$$m_m^{\ 2} - m_p^{\ 2} = -2E_p E_u$$

Şekilden;

$$\left| \vec{P}_p \right| = \left| \vec{P}_m \right| \cos a$$

$$\left| \vec{P}_u \right| = \left| \vec{P}_m \right| \sin a$$

$$\tan a = \frac{P_u}{P_p}$$

$$E_u = \left| \vec{P}_u \right| \Rightarrow E_u = P_p \tan a$$

$$m_p^{\ 2} - m_m^{\ 2} = 2E_p P_p \tan a$$

$$\tan a = \frac{m_p^{\ 2} - m_m^{\ 2}}{2E_p P_p}$$

$$\tan a = \frac{m_p^{\ 2} - m_m^{\ 2}}{2\frac{P_p}{n} P_p}$$

$$\tan a = \frac{m_p^{\ 2} - m_m^{\ 2}}{2g^{\ 2} m_p^{\ 2} v} = \frac{(m_p^{\ 2} - m_m^{\ 2})(1 - b^{\ 2})}{2m_p^{\ 2} v}$$

$$(b = \frac{v}{c})$$

II.8 PROBLEMLER

1- a) Aşağıdaki tepkileşmelerin gerçekleşip gerçekleşmediğine bakınız ve eğer gerçekleşiyorsa hangi tip etkileşme olduğunu belirleyiniz.

$p + \bar{p} \rightarrow \pi^0 + \pi^0$

$\mu^- \rightarrow e^- + \nu + \nu$

$\pi^- + p \rightarrow \Sigma^- + \pi^+$

b) Aşağıdaki etkileşmelerin gerçekleşmesi halinde X ne olmalıdır ? Etkileşme türlerini söyleyiniz.

$p + p \rightarrow \Sigma^+ + K^0 + \pi^+ + \pi^0 + X$

$\Xi^- \rightarrow \pi^- + X$

$K^+ \rightarrow \pi^+ + X + e^- + \nu$

c) Aşağıdaki etkileşmelerin quark yapısına göre şekillerini çiziniz

$\Omega^-(sss) \rightarrow \Lambda^0 (sud) + K^- (\bar{u}s)$

$\mu^+ \rightarrow e^+ + \bar{\nu}_\mu + \nu_e$

2- a) Aşağıdaki etkileşmelerin quark yapısına göre şekillerini çiziniz.

$\Lambda^0 (usd) \rightarrow p(uud) + \pi^- (\bar{u}d)$

$\nu_\mu + e^- + \rightarrow e^- + \nu_\mu$

b) Aşağıdaki tepkileşmelerin gerçekleşip gerçekleşmediğine bakınız ve eğer gerçekleşiyorsa
hangi tip etkileşme olduğunu belirleyiniz.

$p + \bar{p} \rightarrow \pi^0 + \pi^0$

$\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu + \nu$

$\pi^- + p \rightarrow \Sigma^- + \pi^+$

3- Aşağıdaki tepkileşmelerin gerçekleşip gerçekleşmediğine bakınız ve eğer gerçekleşiyorsa hangi tip etkileşme olduğunu belirleyiniz.

$p + p \rightarrow p + n + \pi^+$

$\Sigma^- \rightarrow \Lambda^0 + e^- + \nu$

$K^- + p \rightarrow K^0 + n$

4- a) Aşağıdaki tepkileşmelerin gerçekleşip gerçekleşmediğine bakınız ve eğer gerçekleşiyorsa hangi tip etkileşme olduğunu belirleyiniz.

$\Sigma^- \rightarrow \Lambda^0 + e^- + \nu$

$e^- + p \rightarrow e^- + \Sigma^0 + K^+$

$\pi^- + p \rightarrow \Sigma^- + \pi^+$

b) Aşağıdaki etkileşmelerin gerçekleşmesi halinde X ne olmalıdır ? Etkileşme türlerini söyleyiniz.

$K^+ \rightarrow \pi^+ + X + e^+ + \nu$

$K^- + p \rightarrow X + \bar{K}^0$

$\bar{\Lambda}^0 \rightarrow \pi^+ + X$

BÖLÜM IV

IV.2 LİE GRUBU VE LİE CEBRİ UYGULAMALARI

Bu kısımda bazı Lie Dönüşüm Grubu örnekleri ele alacağız ve bulunan jenaratörlerin oluşturdukları Lie cebrini gözden geçireceğiz.

ÖRNEK-1. 1- boyutlu, ve 2-parametreli Lie dönüşüm gurubuna örnek olarak,

$$x' = a_1 x + a_2$$

koordinat dönüşümünü alabiliriz. Bu bir fiziksel dönüşüm olup, burada; (a_2) ötelemeyi, (a_1) boyca değişimi ifade eden bağımsız parametrelerdir. Bir önceki kısımda tanımladığımız Lie grubunun etkisiz elemanı bu örnekte

$x = 1x + 0$, $g(a_1, a_2; x) = g(1,0;x)$ dır.

Etkisiz eleman civarındaki sonsuz küçük dönüşüm yapılarak, dx sonsuz küçük değişimi

$$x + dx = (1 + da_1)x + 0 + da_2 \qquad dx = da_1 x + da_2$$

olarak bulunur. Bu uzayda mevcut bir F=F(x) fiziksel büyüklüğü uzaydaki bu sürekli öteleme ve boyca değişmeden , parametrelerdeki sonsuz küçük değişimlere bağlı olarak

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx = (da_1 x + da_2)\frac{\partial F}{dx}$$

şekline değişir. Burada lineer bağımsız değişimler olan da_1 katsayısı 1.jeneratörü (ötelemeye karşılık gelen dönüşüm operatörünü), da_2 katsayısı 2.jeneratörü (boyca değişime karşılık gelen dönüşüm operatörünü) verir. Yani; Bu Lie grubu dönüşümü için jenaratörler aşağıdaki şekildedir.

$$X_1 = x\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow a_1$$

$$X_2 = \frac{\partial}{\partial x} \rightarrow a_2$$

Bulunan bu jenaratörlerin komütasyon ilişkisi ise bu operatörleri bize bir LIE cebri oluşturup oluşturmadığı hakkında bilgi verir. Bu bilgi bu uzayda bu dönüşümlerle oluşan invaryanslığın yanında fiziksel olarak kapalılığı ifade eder ki; bu işlemler altında fiziksel modelleme yapmamızı olanaklı kılar Şimdi bu komütasyon ilişkisini inceliyerim.
Kapalılık özelliği bir önceki kısımda gördüğümüz

$\lfloor X_i, X_j \rfloor = C_{ijk} X_k$ şeklinde idi.

$$[X_1, X_2]A = \left(x\frac{\partial}{\partial x} \right)\frac{\partial}{\partial x} A - \frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial}{\partial x} \right) A = x\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \frac{\partial A}{\partial x} - x\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = -\frac{\partial A}{\partial x}$$

$$\Rightarrow [X_1, X_2] = -\frac{\partial}{\partial x} = -X_2 = C_{12k} X_k = C_{121} X_1 + C_{122} X_2 \quad \Rightarrow \; C_{121} = 0, C_{122} = -1$$

$$[X_1, X_2] = -[X_2, X_1] = -C_{12k} X_k \quad \Rightarrow \quad C_{211} = 0, C_{212} = +1$$

Böylece ötelemeye tekabül eden operatör ile (momentum operatörü) ve boyca değişime tekabül eden operatör arasında Lie cebri yapılaşmasını bulmuş oluruz.

ÖRNEK-2. 2-boyutta, 2-parametreli dönüşüm gurubuna örnek olarak iki boyutta boyca büyüme alabiliriz. Böyle bir dönüşümün koordinat dönüşümleri

$$x'_1 = a_1 x_1$$

$$x'_2 = a_2 x_2$$

şeklindedir. Bu dönüşümün etkisiz elemanı

$$\begin{aligned} x_1 &= 1x_1 \\ x_2 &= 1x_2 \end{aligned} \quad \Rightarrow g(a_1, a_2; x_1, x_2) = g(1{,}1; x_1, x_2)$$

olup, sonsuz küçük dönüşüm.

$$x_1 + dx_1 = (1 + da_1)x_1 \Rightarrow dx_1 = da_1 x_1$$

$$x_2 + dx_2 = (1 + da_2)x_2 \Rightarrow dx_2 = da_2 x_2$$

şeklindedir. Bu dönüşüm için Jenaratörleri daha önceki kısımda verdiğimiz kapalı formu kullanarak bulalım.

$$dx_i = \sum_{g=1}^{r} u_{ig}\, da_g \;,\; i = 1,\ldots\ldots,n \rightarrow boyut \quad g = 1,\ldots\ldots,r \rightarrow parametre$$

$$\Rightarrow dx_i = \sum_{g=1}^{2} u_{ig}\, da_g \;,\; i = 1{,}2 \quad g = 1{,}2$$

olduğundan bu örnekte,

$$\begin{aligned} dx_1 &= u_{1g}\, da_g = u_{11} da_1 + u_{12} da_2 \\ dx_2 &= u_{1g}\, da_g = u_{21} da_1 + u_{22} da_2 \end{aligned} \quad \Rightarrow u_{11} = x_1, u_{12} = 0, u_{21} = 0, u_{22} = x_2$$

olarak bulunur. Buradan jenaratörler

$$X_g = \sum_{i=1}^{n} u_{ig}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$$
$$X_1 = \sum_{i=1}^{2} u_{i1}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = u_{11}\frac{\partial}{\partial x_1} + u_{21}\frac{\partial}{\partial x_2}$$
$$X_2 = \sum_{i=1}^{2} u_{i2}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = u_{12}\frac{\partial}{\partial x_1} + u_{22}\frac{\partial}{\partial x_2}$$

olmak üzere

$$\Rightarrow X_1 = x_1\frac{\partial}{\partial x_1}$$
$$X_2 = x_2\frac{\partial}{\partial x_2}$$

bulunurlar. Şimdi bu jenaratörlerin komütasyon ilişkisine bakıp bir Lie cebri oluşturup oluşturmadıklarını görelim ve eğer bir Lie cebri oluşturuyorlar ise yapı sabitlerini hesaplıyalım. Aşağıdaki hesapları yaptığımızda

$$[X_1, X_2]A = \left(x_1\frac{\partial}{\partial x_1}\right)x_2\frac{\partial A}{\partial x_2} - \left(x_2\frac{\partial}{\partial x_2}\right)x_1\frac{\partial A}{\partial x_1}$$
$$= x_1 x_2\frac{\partial^2 A}{\partial x_1\partial x_2} - x_2 x_1\frac{\partial^2 A}{\partial x_1\partial x_2} = 0$$
$$[X_1, X_2] = C_{12k}X_k$$
$$= C_{121}X_1 + C_{122}X_2 \qquad C_{121} = C_{122} = 0 \Rightarrow C_{111} = C_{112} = C_{211} = C_{212} = 0$$

örnekte verilen dönüşümün bir Lie cebri oluşturduğunu görmüş oluyoruz ve yapı sabitlerini hesaplamış oluyoruz.

ÖRNEK-3.

$$x_1' = (1+a)x_1$$
$$x_2' = (1+a)^{-1}x_2$$

Dönüşüm grubunun jenaratörünü bulunuz.

Bu dönüşüm grubunun tek bir jenaratörü vardır. Bu jenaratör

$$(1+a)^{-1} \cong 1 - a \;\; (\,|a| < 1 \;\; \textit{için}).$$

Sınırlaması altında

$$x_1 = (1+0)x_1 \Rightarrow x_1 + dx_1 = (1+da)x_1 \Rightarrow dx_1 = dax_1$$
$$x_2 = (1+0)^{-1}x_2 \Rightarrow x_2 + dx_2 = (1+da)^{-1}x_2 = (1-da)x_2 \Rightarrow dx_2 = -dax_2$$

olup

$$F(x_1,x_2) \Rightarrow dF = \frac{\partial F}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}dx_2 = (dax_1)\frac{\partial F}{\partial x_1} - (dax_2)\frac{\partial F}{\partial x_2}$$
$$\Rightarrow X = x_1\frac{\partial}{\partial x_1} - x_2\frac{\partial}{\partial x_2}$$

şeklinde bulunur.

ÖRNEK-4.

$$\begin{cases} x_1' = \dfrac{1}{1+Cosq_1}x_1 + itgq_2 x_2 \\ x_2' = -itgq_2 x_1 + \dfrac{1}{1+Cosq_1}x_2 \end{cases}$$

Çözüm:

$$\frac{1}{1+Cosq_1} = 1 \Rightarrow q_1 = \frac{p}{2}$$
$$itgq_2 = 0 \Rightarrow q_2 = 0$$
$$x_1 = \frac{1}{1+Cos90}x_1 + itg0x_2$$
$$x_2 = -itg0x_1 + \frac{1}{1+Cos90}x_2$$
$$x_1 + dx_1 = \frac{1}{1+Cos(90+dq_1)}x_1 + i\frac{Sin(0+dq_1)}{Cos(90+dq_1)}x_2 \qquad dq << 1 \Rightarrow Sindq \cong dq, Cosdq \cong 1$$
$$x_2 + dx_2 = -i\frac{Sin(0+dq_2)}{Cos(0+dq_2)}x_1 + \frac{1}{1-Sindq_1}x_2 \qquad \frac{1}{1-dq_1} = (1-dq_1)^{-1} \cong 1 + dq_1$$
$$x_1 + dx_1 = \frac{1}{1-dq_1}x_1 + idq_2x_2 = (1+dq_1)x_1 + idq_2x_2$$
$$x_2 + dx_2 = -idq_2x_1 + \frac{1}{1-dq_1}x_2 = -idq_2x_1 + (1+dq_1)x_2$$
$$dx_1 = dq_1x_1 + idq_2x_2 \qquad , \qquad dx_2 = -idq_2x_1 + dq_1x_2$$
$$F = F(x_1, x_2)$$
$$dF = \frac{\partial F}{\partial x_1}(dq_{11} + idq_2x_2) + \frac{\partial F}{\partial x_2}(-idq_2x_1 + dq_1x_2)$$

Bağımsız dq_1 ve dq_2 değişimlerine göre düzenlenerek jenaratörler ve yapı sabitleri aşağıdaki şekilde bulunur.

$$X_1 = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \quad , \quad X_2 = -ix_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - ix_1 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

$$[X_1, X_2] = 0 = C_{12k} X_k \qquad [X_1, X_2] = 0$$

$$C_{121} = C_{122} = C_{211} = C_{212} = 0 \qquad C_{221} = C_{222} = 0$$

$$[X_1, X_1] = 0 \quad , \quad C_{111} = C_{112} = 0$$

ÖRNEK-5.

$$x'^0 = x^0 chj + x^2 shj$$
$$x'^1 = x^1$$
$$x'^2 = x^0 shj + x^2 chj$$
$$x'^3 = x^3$$

Çözüm

$$x'^0 = x^0 chj + x^2 shj \qquad \mathrm{x}^{0'} = x^0$$

$x^{0'} = 1x^0 + 0x^2$ olması için

shφ=0 ,chφ=1 yani, φ=0,2π olmalı. Buradan

$$x^0 + dx^0 = x^0 ch(0 + dj) + x^2 sh(0 + dj)$$
$$x^0 + dx^0 = x^0 (ch0chdj + sh0shdj) + x^2 (sh0chdj + ch0shdj)$$
$$x^0 + dx^0 = x^0 chdj + x^2 shdj \qquad \mathrm{d}j \ll \Rightarrow chdj = 1 \qquad \mathrm{shd}j \approx \mathrm{d}j$$
$$(x^0 + dx^0) - x^0 = dj x^2 \qquad \mathrm{dx}^0 = x^2 dj$$

$$x'^2 = x^0 shj + x^2 shdj \qquad \mathrm{d}j \ll \Rightarrow \mathrm{chd}j = 1 \qquad \mathrm{shd}j \approx \mathrm{d}j$$

$$\left(x^0 + dx^0\right) - x^0 = dj x^2 \qquad \Rightarrow dx^0 = x^2 dj$$

bulunur.

$$x'^2 = x^0 shj + x^2 chj \qquad \mathrm{x}'^2 = x^2$$
$$x'^2 = 0x^0 + 1x^2 \qquad \mathrm{sh}j = 0 \ , \ \mathrm{ch}j = 1 \ \text{ ise } \ j = 0,2p$$

$$x^2 + dx^2 = x^0 sh(0+dj) + x^2 ch(0+dj) \Rightarrow (\mathrm{x}^2 + \mathrm{dx}^2) - x^2 = x^0 dj \Rightarrow dx^2 = x^0 dj$$

$$x^2 + dx^2 = x^0 shdj + x^2 chdj \approx x^0 \mathrm{d}j + x^2 1$$

$x' = x'$ $\mathrm{dx}' = 0$, $\mathrm{x}'^3 = x^3$ $\mathrm{dx}^3 = 0$ bulmuş olduk.

F=F (x^0, x^1, x^2, x^3)

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x^0} dx^0 + \frac{\partial F}{\partial x'} dx' + \frac{\partial F}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial F}{\partial x^3} dx^3$$

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x^0} x^2 dj + \frac{\partial F}{\partial x^2} x^0 dj = (x^2 \frac{\partial F}{\partial x^0}^2 + x^0 \frac{\partial F}{\partial x^2}) dj$$

$x_1 = x^2 \dfrac{\partial}{\partial x^0} + x^0 \dfrac{\partial}{\partial x^2}$ jeneratörü bulunur.

ORNEK-6.a.

$$x_1' = 2\left(1 + \frac{a}{2}\right) x_1 + 2bx_2$$

$$x_2' = 2bx_1 + 2(1 + \frac{a}{2}) x_2$$

Çözüm

$x_1' = x_1$ olması için;

$x_1' = 1x_1 + 0x_2$ $\quad$ $2\mathrm{b} = 0 \Rightarrow \mathrm{b} = 0$ $\quad$ $2(1 + \frac{0}{2}) = 1 \Rightarrow \mathrm{a} = -1$

$$x_1 + dx_1 = 2(1 + \frac{(-1+da)}{2}) x_1 + 2(0 + db) x_2$$

$$(x_1 + dx_1) - x_1 = (1+da) x_1 + 2dbx_2 - x_1 \Rightarrow dx_1 = dax_1 + 2dbx_2$$

diğer koordinat için aynı şekilde

$x_2' = 2bx_1 + 2(1 + \frac{a}{2}) x_2$ $\quad$ $\mathrm{x}_2' = 0x_1 + 1x_2$ $\quad$; b = 0 $\quad$ a = -1

$$x_2 + dx_2 = 2(0 + db) x_1 + 2(1 + \frac{(-1+da)}{2}) x_2$$

$$(x_2 + dx_2) - x = 2dbx_1 + (1+da) x_2 - x_2 \Rightarrow dx_2 = 2dbx_1 + dax_2$$

bulunur. Buradan,

F=F $(x_1; x_2)$ $\quad$ $\mathrm{dF} = \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{x}_1} dx_1 + \dfrac{\partial F}{\partial x_2} dx_2$

$$\mathrm{dF} = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{x}_1}(dax_1 + 2dbx_2) + \frac{\partial F}{\partial x_2}(2dbx_1 + dax_2)$$

$$\mathrm{dF}=\left(x_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} \right) da + \left(2x_2 \frac{\partial F}{\partial x_1} + 2x_1 \frac{\partial F}{\partial x_2} \right) db$$

olduğundan

1.Jenaratör; $X_1 = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$

2.Jenaratör; $X_2 = 2x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + 2x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}$

bulunur. Bunların komütasyon ilişkileri

$$[X_1 ; X_1] = C_{111} X_1 + C_{112} X_2$$

$$[X_2 ; X_1] = C_{211} X_1 + C_{122} X_2$$

$$[X_2 ; X_1]A = X_2 X_1 A - X_1 X_2 A = \left(2x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + 2x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \right)\left(x_1 \frac{\partial A}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial A}{\partial x_2} \right) -$$

$$\left[\left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right)\left(2x_2 \frac{\partial A}{\partial x_1} + 2x_1 \frac{\partial A}{\partial x_2} \right) \right]$$

$$[X_2 ; X_1] = 2x_2 \left(\frac{\partial A}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial^2 A}{\partial x^2{}_1} \right) + 2x_2 x_2 \left(\frac{\partial^2 A}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + 2x_1 x_1 \frac{\partial^2 A}{\partial x_2 \partial x_1} + 2x_1 \left(\frac{\partial A}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial A}{\partial x_2} \right)$$

$$- \left[x_1 \left(2x_2 \frac{\partial^2 A}{\partial x^2{}_1} \right) + x_1 \left(2 \frac{\partial A}{\partial x_2} + 2x_1 \frac{\partial^2 A}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + \left(x_2 2 \frac{\partial A}{\partial x_1} + 2x_2 x_2 \frac{\partial^2 A}{\partial x_2 \partial x_1} \right) + \left(x_2 2x_1 \frac{\partial^2 A}{\partial x_2{}^2} \right) \right] = 0$$

$C_{211} = 0, C_{212} = 0$ *yapı sabitlerini bulduk.*

ÖRNEK-6.b.

$$x'^0 = x^0$$

$$x'^1 = x^1$$

$$x'^2 = \cos q \; x^2 + sinq \; x^3$$

$$x'^3 = -sinq \; x^2 + \cos q \; x^3$$

Bu dönüşüm uzay-zamanda x_1 ekseni etrafında dönmeyi ifade etmektedir.Dört boyutlu bir parametreli dönüşüme bir örnektir. Bu dönüşümün türev operatörü ise

Etkisiz eleman

$g(q; x^0, x^1, x^2, x^3) = g(0)$ $\quad dq << 1$ için $\cos dq \cong 1, \sin dq \cong dq$ dır.

olmak üzere;

$$x^2 + dx^2 = \cos(0 + dq)x^2 + \sin(0 + dq)x^3 = x^2 \cos dq + x^3 \sin q$$

$$x^3 + dx^3 = -\sin(0 + dq)x^2 + \cos(0 + dq)x^3 = -x^2 \sin dq + x^3 \cos dq$$

$$\Rightarrow \; x^2 + dx^2 = x^2 + x^3 dq \Rightarrow dx^2 = x^3 dq$$

$$x^3 + dx^3 = -x^2 dq + x^3 \Rightarrow dx^3 = -x^2 dq$$

olduğundan türev operatörü

$$F(x^0, x^1, x^2, x^3) \Rightarrow dF = \frac{\partial F}{\partial x^0} dx^0 + \frac{\partial F}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial F}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial F}{\partial x^3} dx^3$$

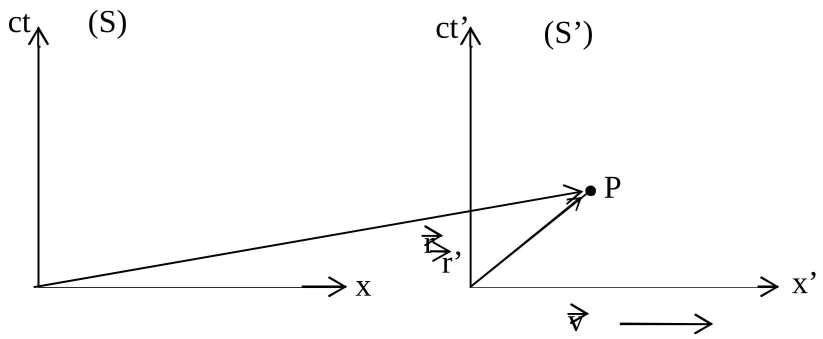
$$\Rightarrow dF = \frac{\partial F}{\partial x^0} dx^0 + \frac{\partial F}{\partial x^1} dx^1 + x^3 dq \frac{\partial F}{\partial x^2} - x^2 dq \frac{\partial F}{\partial x^3}$$

$$X = x^3 \frac{\partial}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial}{\partial x^3} \quad \Rightarrow \quad \frac{i}{\mathbf{h}}\left(x^3 \frac{\partial}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial}{\partial x^3} \right) = L_{x'}$$

şeklinde bulunur. Görüldüğü gibi bu bize açısal momentum operatörünü verir.

Örnek: SL(1,1) dönüşüm grubunun jeneratörünün bulunuz. (Burada; S dönüşüm matrisinin determinantının 1 olduğunu, L dönüşüm matrisinin Lorentz matrisi olduğunu ve (1,1) ise dönüşümün 1 zaman ve 1 uzay boyutlarında olduğunu ifade etmektedir.)

Lorentz Dönüşümleri: Bu örneği yapabilmemiz için Lorentz dönüşümlerini hatırlayalım. Aşağıdaki şekildeki gibi, bir (S) sistemi ve bu (S) sistemine göre v hızıyla düzgün doğrusal hareket yapan bir (S') sistemi olsun.



P noktasının koordinatları $x^0 = ct$ ve $x^1 = x$ olmak üzere, (S) sisteminde (x^0 , x^1), (S') sisteminde $(x^{0'} , x^{1'})$, $\gamma = [1/(1-\beta^2)]^{½}$ ve $\beta = v / c$ olmak üzere, (S) sistemi ile (S') sistemi arasındaki dönüşümleri veren bağıntılar (Lorentz dönüşümleri),

$$\begin{aligned} x^{0'} &= \gamma(x^0 - \beta x^1) \\ x^{1'} &= \gamma(x^1 - \beta x^0) \\ x^{2'} &= x^2 \\ x^{3'} &= x^3 \end{aligned}$$

koordinat dönüşümleri ile verilir.Bu koordinat dönüşümü X, X' koordinatları ifade eden sütun matrisleri olmak üzere matris formunda

$$X' = LX$$

olarak yazılabilir ve

$$\begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}$$

şeklinde gösterilir.Burada L, elemanlarını Lorentz dönüşümlerinden elde ettiğimiz matristir.

$$L = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix}$$

Lorentz grubu için ortogonal birim matris: Einstein'ın özel rölativite teorisi, uzay-zamanı birlikte mutlak kabul eder ve koordinat dönüşümlerinde

$$x_\mu x^\mu = c^2t^2 - x^2 = c^2t'^2 - x'^2 = \text{sabit}$$

olduğunu söyler. Bu özellik matris formunda

$$L^TGL = G$$

ile ifade edilir. Burada G, Minkowski metriğini veren, transpozesi kendisine eşit (simetrik) ve karesi de I birim matrise eşit olan matrisdir.

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Daha önceki örneklere benzer şekilde, Lorentz koordinat dönüşümünün transpozesini alıp, sağ taraftan GX ile çarparsak,

$$X'^T = (LX)^T = X^T L^T \Rightarrow X'^T G X' = X^T G X = G$$

olduğu görülür.

Şimdi uzay ve zaman için sonsuz küçük ötelemeleri verecek olan dL matrisini oluşturalım. (c = 1)

$$\begin{pmatrix} t + dt \\ x + dx \end{pmatrix} = (I + dL)\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

$a_i \ll 1$ olmak üzere, $dL = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ olsun. Buradan

$$dL^T = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{pmatrix} \text{ olur.}$$

Dönüşüm özelliğinden dolayı

$$[(I + dL)^T G](I + dL) = G$$

$$(I + dL^T G)(I + dL) = G$$

$$G + GdL + dL^T G + dL^T G dL = G$$
$$GG = I$$
$$GdLG = -dL^T$$

olur. $dL^T G dL$ terimini çok küçük olacağı için ihmal edebiliriz. Bu durumda $dL = - dL^T$ bulunur, ki bu da dL matrisinin anti - simetrik olmasıdır. Şimdi dL matrisinin anti – simetrik olma özelliğini kullanarak matrisin elemanlarını hesaplayalım.

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{pmatrix}$$

$a_1 = - a_1 \Rightarrow 2a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 0$
$a_4 = - a_4 \Rightarrow 2a_4 = 0 \Rightarrow a_4 = 0$
$a_2 = - a_3 \Rightarrow a_2 + a_3 = 0$
$a_3 = - a_2 \Rightarrow a_2 + a_3 = 0$

sonuçları elde edilir. Görüldüğü gibi elimizde a_2 ve a_3 bilinmeyenlerine bağlı iki denklem sistemi var.

$$\left.\begin{array}{l} a_2 + a_3 = 0 \\ a_2 + a_3 = 0 \end{array}\right\}$$

Bu homojen denklem sistemidir ve katsayılar matrisinin determinantı sıfır ise sonsuz çözüm vardır. Sıfırdan farklı ise yalnız trivial çözüm vardır. Katsayılar matrisinin determinantını hesaplayalım:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$ olduğundan dolayı sonsuz çözüm vardır.

O halde a_2 = dk olsun. Bu durumda a_3 = - dk olur.

$$dL = \begin{pmatrix} 0 & dk \\ dk & 0 \end{pmatrix}$$

$$I + dL = \begin{pmatrix} 1 & dk \\ dk & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} t + dt \\ x + dx \end{pmatrix} = (I + dL)\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} t + dt \\ x + dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & dk \\ dk & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} t + dt \\ x + dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t + xdk \\ tdk + x \end{pmatrix}$$

$$t + dt = t + xdk \quad \Rightarrow \quad dt = xdk$$

$$x + dx = tdk + x \quad \Rightarrow \quad dx = tdk$$

bulunur.$dF = dt\,(\partial F/\partial t) + dx\,(\partial F/\partial x)$ ifadesinde bulduğumuz dt ve dx ifadelerini yerine yazalım.

$$dF = dk[x(\partial/\partial t) + t\,(\partial/\partial x)]$$

elde edilir. Öyleyse jeneratörümüz

$$J = x(\partial/\partial t) + t\,(\partial/\partial x)$$

olarak bulunur.

Bu jeneratör uzay - zamana bağlı olan büyüklükte, uzay değişimleri ile zaman değişimlerinin birbirinden bağımsız olmadığını gösterir.

IV.2.1 PROBLEMLER

1- $x' = e^{-a} x + (1 + b)$ koordinat dönüşümünün oluşturduğu Lie Grubunun türev operatörlerini (J_1 , J_2 jenaratörlerini) bulunuz. Burada J_1, a sabitine ait jeneratör ve J_2 , b sabitine ait jeneratörlerdir.

a) $[x J_1 , J_2^2]$ komütatör ifadesini hesaplayınız. b) $\psi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{3ix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3ix}$, $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Pauli spin matrisi ve $A = \sigma J_1$ olmak üzere A operatörünün $< \Psi | A | \Psi >$ beklenen değerini hesaplayınız

2- $x' = (\text{Sin}a)\, x + b$ koordinat dönüşümünün oluşturduğu Lie Grubunun türev operatörlerini
$y' = (\text{Sin}a)\, y + b$ (J_1 , a sabitine ait jeneratör ve J_2 b sabitine ait jeneratör) olmak üzere

bulunuz . J_1^2 , J_2^2 ve $[J_1^2 + J_2^2, J_2]$ komütatör ifadelerini hesaplayınız.

3- $x' = e^{-a} x + b$ koordinat dönüşümünün oluşturduğu Lie Grubunun türev operatörlerini
$y' = e^{a} y + b$ (J_1 , J_2 jenaratörlerini) bulunuz. Burada J_1, a sabitine ait jeneratör ve J_2 , sabitine ait jeneratörlerdir. a) J_1^2 ve J_2^2 operatörlerini ve $[J_1^2 + J_2^2 , J_2]$ komütatör ifadesini hesaplayınız

4- $x_1` = e^{a} x_1 + (1\text{-}2b)\, x_2$ koordinat dönüşümünün oluşturduğu Lie grubunun türev operatörlerini (J_1 , J_2)

$x_2` = (1\text{-}2b)\, x_1 + e^{a} x_2$ jenaratörlerini) bulunuz . Burada J_1 , a sabitine ait jenaratör ve J_2, b sabitine ait jeneratörlerdir . a) $[J_1^2 + J_2^2 , J_2]$ komütatör ifadesini hesaplayınız. b) $e^{J} J_2 e^{J}$ ifadesini hesaplayınız.

5- $x' = a x + (1- b)$ koordinat dönüşümünün oluşturduğu türev operatörlerini (X_1 , X_2 jenaratörlerini) bulunuz Burada X_1, a sabitine ait jeneratör ve X_2 b sabitine ait jeneratörlerdir. a) Yapı sabitlerini hesaplayınız. b) $[X_1^2 + X_2^2 , X_1]$ komütatör ifadesini hesaplayınız. c) $e^{X_2} X_1 e^{-X_2}$ ifadesini hesaplayınız

6- $x' = ax + b$ koordinat dönüşümünün oluşturduğu türev operatörlerini (J_1, J_2 jenaratörlerini) bulunuz Burada J_1, a parametresine ait jeneratör ve J_2 b parametresine ait jeneratörlerdir.
$[x J_2 , 2 J_1]$ komütatör ifadesini hesaplayınız.

7- $x' = ax + (1- b)$ koordinat dönüşümünün oluşturduğu türev operatörlerini (J_1, J_2 jenaratörlerini) bulunuz Burada J_1, a parametresine ait jeneratör ve J_2 b parametresine ait jeneratörlerdir.
$[3 J_2 , x J_1]$ komütatör ifadesini hesaplayınız.

8- $x' = (\cos a)\, x + \sin b$ koordinat dönüşümünün oluşturduğu türev operatörlerini (J_1 , J_2 jenaratörlerini) bulunuz Burada J_1 , a parametresine ait jeneratör ve J_2 b parametresine ait jeneratörlerdir. a) $[\, J_1^2 + J_2^{\,2}\, , J_1\,]$ komütatör ifadesini hesaplayınız.

b) $e^{J_2}\, J_1\, e^{-J_2}$ ifadesini hesaplayınız

9- $x' = e^{-a}\, x + (1- b)$ koordinat dönüşümünün oluşturduğu türev operatörlerini (J_1 , J_2 jenaratörlerini) bulunuz Burada J_1 , a parametresine ait jeneratör ve J_2 b parametresine ait jeneratörlerdir. a) $[\, J_1^2 + J_2^{\,2}\, , J_1\,]$ komütatör ifadesini hesaplayınız.

b) $e^{J_2}\, J_1\, e^{-J_2}$ ifadesini hesaplayınız

10- $x' = e^{-a}\, x + by$
$y' = e^{-a}\, y + bx$
koordinat dönüşümünün oluşturduğu Lie Grubunun türev operatörlerini (X_1 , X_2 jenaratörlerini) bulunuz. Burada X_1 , a sabitine ait jeneratör ve X_2 b sabitine ait jeneratörlerdir. a) Lie cebiri yapı sabitlerini hesaplayınız.

b) $[\, X_1^2 + X_2^{\,2}\, , X_1\,]$ komütatör ifadesini hesaplayınız. c) $e^{X_1}\, X_2\, e^{-X_1}$ ifadesini hesaplayınız.

11- $x' = a\, x + (1 - b)y$
$y' = a\, y + (1- b)x$
koordinat dönüşümünün oluşturduğu Lie Grubunun türev operatörlerini (X_1 , X_2 jenaratörlerini) bulunuz. Burada X_1 , a sabitine ait jeneratör ve X_2 b sabitine ait jeneratörlerdir. a) Lie cebiri yapı sabitlerini hesaplayınız. b) $e^{X_1}\, X_2\, e^{-X_1}$ ifadesini hesaplayınız.

12- $x' = e^{-a}\, x + (1 + b)y$
$y' = e^{-a}\, y + (1 + b)x$
koordinat dönüşümünün oluşturduğu Lie Grubunun türev operatörlerini (X_1 , X_2 jenaratörlerini) bulunuz. Burada X_1 , a sabitine ait jeneratör ve X_2 b sabitine ait jeneratörlerdir. $[\, X_1^2 + X_2^{\,2}\, , X_1\,]$ komütatör ifadesini hesaplayınız.

13- $x' = (\sin a)\, x + b$
$y' = (\sin a)\, y + b$
koordinat dönüşümünün oluşturduğu Lie Grubunun türev operatörlerini (J_1 , a sabitine ait jeneratör ve J_2 b sabitine ait jeneratör) olmak üzere bulunuz. J_1^2 ve $[\, J_1^{\,2}\, , J_2\,]$ komütatör ifadelerini hesaplayınız.

14- $x' = (1-a)x + b$ koordinat dönüşümünün oluşturduğu Lie Grubunun türev operatörlerini (J_1 , J_2 jenaratörlerini) bulunuz. Burada J_1 , a sabitine ait jeneratör ve J_2 , b sabitine ait jeneratörlerdir.

a) $[x^2 J_1\, , J_2\,]$ komütatör ifadesini hesaplayınız. b) $\psi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{Sin}2x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{Cos}2x$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ Pauli spin matrisi ve $A = \sigma_3 J_2$ olmak üzere A operatörünün $\langle \Psi \mid A \mid \Psi \rangle$ beklenen değerini hesaplayınız.

BÖLÜM IV

SU(2) VE SU(3) GRUBU JENERATÖRLERİNİN MATRİS GÖSTERİMİ

a) SU(2) grubu jeneratörlerinin matris gösterimleri.
b) SU(3) grubu jeneratörlerinin matris gösterimleri.

a) SU(2) grubu jeneratörleri 2x2 boyutlu matrislerdir. Uniter matristir ve determinantı bire eşittir.

SU(2) grubu jeneratörlerini l_a ile gösterelim.

SU(2) grubu $n^2 - 1 = 2^2 - 1 = 3$ jeneratöre sahiptir, yani $a = 1,2,3$ olmaktadır.

$\hat{F}_a$ operatörleri SU(2) grubu jeneratörleri olsun.

$l_a = 2\hat{F}_a$ ile verilir.

Ortagonallık koşulundan

$\langle q_i | q_j \rangle = d_{ij}$ olmaktadır.

$\hat{T}_+$ yükseltme $\hat{T}_-$ alçaltma operatörleri olmak üzere,

$$\hat{F}_1 = \hat{T}_1 = \frac{1}{2}\left(\hat{T}_+ + \hat{T}_-\right)$$
$$\hat{F}_2 = \hat{T}_2 = -\frac{1}{2}i\left(\hat{T}_+ - \hat{T}_-\right)$$
$$\hat{F}_3 = \hat{T}_3$$

ile verilmektedir. Ayrıca

$$\hat{T}_+ \left| q_j \right\rangle = d_{j2} | q_1 ,$$
$$\hat{T}_- \left| q_j \right\rangle = d_{j1} | q_2 ,$$
$$\hat{T}_3 \left| q_1 \right\rangle = \frac{1}{2}\left| q_1 \right\rangle ,$$
$$\hat{T}_3 \left| q_2 \right\rangle = -\frac{1}{2}\left| q_2 \right\rangle ,$$
$$\hat{T}_3 \left| q_3 \right\rangle = 0\left| q_3 \right\rangle$$

şeklindedir.

$$\left(\hat{\lambda}_a\right)_{ij} = 2\left\langle q_i \middle| \hat{F}_a \middle| q_j \right\rangle \quad \text{ise;}$$

$$\left(\hat{\lambda}_1\right)_{ij} = 2\left\langle q_i \middle| \hat{F}_1 \middle| q_j \right\rangle = \left\langle q_i \middle| \hat{T}_+ + \hat{T}_- \middle| q_j \right\rangle = \left\langle q_i \middle| \hat{T}_+ \middle| q_j \right\rangle + \left\langle q_i \middle| \hat{T}_- \middle| q_j \right\rangle$$
$$= \left\langle q_i \mid q_1 \right\rangle \delta_{j2} + \left\langle q_i \mid q_2 \right\rangle \delta_{j1} = \delta_{i1}\delta_{j2} + \delta_{i2}\delta_{j1}$$

$$\left(\hat{\lambda}_1\right)_{12} = \left(\hat{\lambda}_1\right)_{21} = 1$$
$$\left(\hat{\lambda}_1\right)_{11} = \left(\hat{\lambda}_1\right)_{22} = 0 \quad \text{ise}$$
$$\hat{\lambda}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{olur.}$$

$$\left(\hat{\lambda}_2\right)_{ij} = 2\left\langle q_i \middle| \hat{F}_2 \middle| q_j \right\rangle = \frac{1}{i}\left[\left\langle q_i \middle| \hat{T}_+ \middle| q_j \right\rangle - \left\langle q_i \middle| \hat{T}_- \middle| q_j \right\rangle\right]$$
$$= -i\left[\left\langle q_i \mid q_1 \right\rangle \delta_{j2} - \left\langle q_i \mid q_2 \right\rangle \delta_{j1}\right] = -i\left(\delta_{i1}\delta_{j2} - \delta_{i2}\delta_{j1}\right)$$

$$\left(\hat{\lambda}_2\right)_{12} = -i$$
$$\left(\hat{\lambda}_2\right)_{21} = i$$
$$\left(\hat{\lambda}\right)_{11} = \left(\hat{\lambda}_1\right)_{22} = 0 \quad \text{ise}$$
$$\hat{\lambda}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{olur.}$$

$$\left(\hat{\lambda}_3\right)_{ij} = 2\left\langle q_i \middle| \hat{F}_3 \middle| q_j \right\rangle = 2\left\langle q_i \middle| \hat{T}_3 \middle| q_j \right\rangle$$
$$\left(\hat{\lambda}_3\right)_{i1} = 2\left\langle q_i \middle| \hat{T}_3 \middle| q_1 \right\rangle = 2\left\langle q_i \mid q_1 \right\rangle = \delta_{i1}$$
$$\left(\hat{\lambda}_3\right)_{i2} = 2\left\langle q_i \middle| \hat{T}_3 \middle| q_2 \right\rangle = -\left\langle q_i \mid q_2 \right\rangle = -\delta_{i2}$$
$$\left(\hat{\lambda}_3\right)_{i3} = 2\left\langle q_i \middle| \hat{T}_3 \middle| q_3 \right\rangle = 0$$

$$\left(\hat{\lambda}_3\right)_{i3} = 1$$
$$\left(\hat{\lambda}_3\right)_{22} = -1$$
$$\left(\hat{\lambda}_3\right)_{12} = \left(\hat{\lambda}_1\right)_{21} = 0 \quad \text{ise}$$
$$\hat{\lambda}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{olur.}$$

Buradan SU(2) grubunun jeneratörleri olan l_1, l_2, l_3'ün Pauli matrisleri olduğu görülmektedir.

$$J_1 = -\frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$J_2 = -\frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$
$$J_3 = -\frac{i}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

b) SU(3) grubunun ise $n^2 - 1 = 3^2 - 1 = 9$ tane jeneratörü vardır.

$l_a = 2\hat{F}_a$ ve $\langle q_i | q_j \rangle = d_{ij}$

Burada $\hat{T}_+, \hat{U}_+, \hat{V}_+$ yükseltme operatörleri, $\hat{T}_-, \hat{U}_-, \hat{V}_-$ alçaltma operatörleri olmak üzere;

$$\hat{T}_- |q_1\rangle = |q_2\rangle,$$
$$\hat{T}_+ |q_2\rangle = |q_1\rangle,$$
$$\hat{U}_- |q_2\rangle = |q_3\rangle,$$
$$\hat{U}_+ |q_3\rangle = |q_2\rangle,$$
$$\hat{V}_+ |q_3\rangle = |q_1\rangle,$$
$$\hat{V}_- |q_1\rangle = |q_3\rangle,$$
$$\hat{T}_3 |q_1\rangle = \frac{1}{2}|q_1\rangle,$$
$$\hat{T}_3 |q_2\rangle = -\frac{1}{2}|q_2\rangle$$
$$\hat{T}_3 |q_3\rangle = 0|q_3\rangle$$
$$\hat{Y} |q_1\rangle = \frac{1}{3}|q_1\rangle$$
$$\hat{Y} |q_2\rangle = \frac{1}{3}|q_2\rangle$$
$$\hat{Y} |q_3\rangle = -\frac{2}{3}|q_3\rangle$$

$$\hat{F}_1 = \hat{T}_1 = \frac{1}{2}\left(\hat{T}_+ + \hat{T}_-\right)$$
$$\hat{F}_2 = \hat{T}_2 = -\frac{1}{2}i\left(\hat{T}_+ - \hat{T}_-\right)$$
$$\hat{F}_3 = \hat{T}_3$$

$$\hat{F}_5 = -\frac{1}{2}i\left(\hat{V}_+ - \hat{V}_-\right)$$

$$\hat{F}_6 = \frac{1}{2}\left(\hat{U}_+ + \hat{U}_-\right)$$

$$\left(\hat{\lambda}_a\right)_{ij} = 2\left\langle q_i\right|F_a\left|q_j\right\rangle \quad \text{ise;}$$

$$\left(\hat{\lambda}_1\right)_{ij} = 2\left\langle q_i\right|F_1\left|q_j\right\rangle = \left\langle q_i\right|\hat{T}_+ + \hat{T}_-\left|q_j\right\rangle = \left\langle q_i\right|\hat{T}_+\left|q_j\right\rangle + \left\langle q_i\right|\hat{T}_-\left|q_j\right\rangle$$

$$\hat{T}_+\left|q_j\right\rangle = \delta_{j2}|q_1 \quad \text{ve} \quad \hat{T}_-\left|q_j\right\rangle = \delta_{j1}|q_2 \quad \text{ise;}$$

$$\left(\hat{\lambda}_1\right)_{ij} = \langle q_i \mid q_1\rangle\delta_{j2} + \langle q_i \mid q_2\rangle\delta_{j1} = \delta_{i2}\delta_{j2} + \delta_{i2}\delta_{j1}$$

$$\left(\hat{\lambda}_1\right)_{12} = \left(\hat{\lambda}_1\right)_{21} = 1 \quad ,$$
$$\left(\hat{\lambda}_1\right)_{11} = \left(\hat{\lambda}_1\right)_{13} = \left(\hat{\lambda}_1\right)_{22} = \left(\hat{\lambda}_1\right)_{23} = \left(\hat{\lambda}_1\right)_{31} = \left(\hat{\lambda}_1\right)_{32} = \left(\hat{\lambda}_1\right)_{33} = 0 \quad \text{ise;}$$

$$\hat{\lambda}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{olur.}$$

$$\left(\hat{\lambda}_2\right)_{ij} = 2\left\langle q_i\right|\hat{F}_2\left|q_j\right\rangle = \frac{1}{i}\left[\left\langle q_i\right|\hat{T}_+\left|q_j\right\rangle - \left\langle q_i\right|\hat{T}_-\left|q_j\right\rangle\right]$$
$$= -i\left[\langle q_i \mid q_1\rangle\delta_{j2} - \langle q_i \mid q_2\rangle\delta_{j1}\right] = -i\left[\delta_{i1}\delta_{j2} + \delta_{i2}\delta_{j1}\right]$$

$$\left(\hat{\lambda}_2\right)_{12} = -i$$
$$\left(\hat{\lambda}_2\right)_{13} = 0$$
$$\left(\hat{\lambda}_2\right)_{22} = \left(\hat{\lambda}_2\right)_{23} = 0$$
$$\left(\hat{\lambda}_2\right)_{13} = \left(\hat{\lambda}_2\right)_{32} = \left(\hat{\lambda}_2\right)_{33} = 0 \quad \text{ise;}$$

$$\hat{\lambda}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{olur.}$$

$$\left(\hat{\lambda}_3\right)_{ij} = 2\left\langle q_i\right|\hat{F}_3\left|q_j\right\rangle = 2\left\langle q_i\right|\hat{T}_3\left|q_j\right\rangle$$
$$\left(\hat{\lambda}_3\right)_{i1} = 2\left\langle q_i\right|\hat{T}_3\left|q_1\right\rangle = \langle q_i \mid q_1\rangle = \delta_{i1}$$

$$\left(\hat{\lambda}_3\right)_{i2} = 2\left\langle q_i\right|\hat{T}_3\left|q_2\right\rangle = -\langle q_i \mid q_2\rangle = -\delta_{i2} \qquad \left(\hat{\lambda}_3\right)_{i2} = 2\left\langle q_i\right|\hat{T}_3\left|q_3\right\rangle = 0$$

$$(\hat{\lambda}_3)_{11} = 1$$
$$(\hat{\lambda}_3)_{22} = -1$$
$$(\hat{\lambda}_3)_{12} = (\hat{\lambda}_3)_{13} = (\hat{\lambda}_3)_{21} = (\hat{\lambda}_3)_{23} = (\hat{\lambda}_3)_{31} = (\hat{\lambda}_3)_{32} = (\hat{\lambda}_3)_{33} = 0 \qquad \text{ise;}$$

$$\hat{\lambda}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{olur.}$$

$$(\hat{\lambda}_4)_{ij} = 2\langle q_i|\hat{F}_4|q_j\rangle = \langle q_i|\hat{V}_+|q_j\rangle + \langle q_i|\hat{V}_-|q_j\rangle$$
$$\hat{V}_+|q_j\rangle = \delta_{j3}|q_1\rangle \qquad \text{ve} \qquad \hat{V}_-|q_j\rangle = \delta_{j1}|q_3\rangle \qquad \text{ise;}$$

$$(\hat{\lambda}_4)_{ij} = \langle q_i|q_1\rangle\delta_{j3} + \langle q_i|q_3\rangle\delta_{j1} = \delta_{i1}\delta_{j3} + \delta_{i3}\delta_{j1}$$

$$(\hat{\lambda}_4)_{13} = (\hat{\lambda}_4)_{31} = 1$$
$$(\hat{\lambda}_4)_{11} = (\hat{\lambda}_4)_{12} = (\hat{\lambda}_4)_{21} = (\hat{\lambda}_4)_{22} = (\hat{\lambda}_4)_{23} = (\hat{\lambda}_4)_{32} = (\hat{\lambda}_4)_{33} = 0 \qquad \text{ise;}$$

$$\hat{\lambda}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{olur.}$$

$$(\hat{\lambda}_5)_{ij} = \frac{1}{i}\left[\langle q_i|\hat{V}_+|q_j\rangle - \langle q_i|\hat{V}_-|q_j\rangle\right] = \frac{1}{i}\left[\delta_{i1}\delta_{j3} - \delta_{i3}\delta_{j1}\right]$$

$$(\hat{\lambda}_5)_{13} = -i$$
$$(\hat{\lambda}_5)_{31} = i$$
$$(\hat{\lambda}_5)_{11} = (\hat{\lambda}_5)_{12} = (\hat{\lambda}_5)_{21} = (\hat{\lambda}_5)_{22} = (\hat{\lambda}_5)_{23} = (\hat{\lambda}_5)_{32} = (\hat{\lambda}_5)_{33} = 0 \qquad \text{ise;}$$

$$\hat{\lambda}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{olur.}$$

$$(\hat{\lambda}_6)_{ij} = 2\langle q_i|\hat{F}_6|q_j\rangle = \langle q_i|\hat{U}_+|q_j\rangle + \langle q_i|\hat{U}_-|q_j\rangle$$

$$\hat{U}_+|\mathrm{q}_\mathrm{j}\rangle = \delta_{j3}|\mathrm{q}_2\rangle \qquad \text{ve} \qquad \hat{U}_-|\mathrm{q}_\mathrm{j}\rangle = \delta_{j2}|\mathrm{q}_3\rangle \qquad \text{ise;}$$

$$(\hat{\lambda}_6)_{ij} = \langle q_i|q_2\rangle\delta_{j3} + \langle q_i|q_3\rangle\delta_{j2} = \delta_{i1}\delta_{j3} + \delta_{i3}\delta_{j2} \qquad (\hat{\lambda}_6)_{23} = (\hat{\lambda}_6)_{32} = 1$$

$$\left(\hat{l}_6\right)_{11} = \left(\hat{l}_6\right)_{12} = \left(\hat{l}_6\right)_{13} = \left(\hat{l}_6\right)_{21} = \left(\hat{l}_6\right)_{22} = \left(\hat{l}_6\right)_{31} = \left(\hat{l}_6\right)_{33} = 0 \qquad \text{ise;}$$

$$\hat{l}_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{olur.}$$

$$\left(\hat{l}_7\right)_{ij} = \frac{1}{i}\left[\left\langle q_i\middle|\hat{U}_+\middle|q_j\right\rangle - \left\langle q_i\middle|\hat{U}_-\middle|q_j\right\rangle\right] = \frac{1}{i}\left[d_{i2}d_{j3} - d_{i3}d_{j2}\right]$$

$$\left(\hat{l}_7\right)_{23} = -i$$

$$\left(\hat{l}_7\right)_{32} = i$$

$$\left(\hat{l}_7\right)_{11} = \left(\hat{l}_7\right)_{12} = \left(\hat{l}_7\right)_{13} = \left(\hat{l}_7\right)_{21} = \left(\hat{l}_7\right)_{22} = \left(\hat{l}_7\right)_{31} = \left(\hat{l}_7\right)_{33} = 0 \qquad \text{ise;}$$

$$\hat{l}_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{olur.}$$

$$\left(\hat{l}_8\right)_{ij} = 2\left\langle q_i\middle|\hat{F}_8\middle|q_j\right\rangle = \sqrt{3}\left\langle q_i\middle|\hat{Y}\middle|q_j\right\rangle$$

$$\left(\hat{l}_8\right)_{i1} = \sqrt{3}\left\langle q_i\middle|\hat{Y}\middle|q_1\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}d_{i1}$$

$$\left(\hat{l}_8\right)_{i2} = \sqrt{3}\left\langle q_i\middle|\hat{Y}\middle|q_2\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}d_{i2}$$

$$\left(\hat{l}_8\right)_{i3} = \sqrt{3}\left\langle q_i\middle|\hat{Y}\middle|q_3\right\rangle = -\frac{2}{\sqrt{3}}d_{i3}$$

$$\left(\hat{l}_8\right)_{11} = \left(\hat{l}_8\right)_{22} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\left(\hat{l}_8\right)_{33} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\left(\hat{l}_8\right)_{12} = \left(\hat{l}_8\right)_{13} = \left(\hat{l}_8\right)_{21} = \left(\hat{l}_8\right)_{23} = \left(\hat{l}_8\right)_{31} = \left(\hat{l}_8\right)_{32} = 0 \qquad \text{ise;}$$

$$\hat{l}_8 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{olur.}$$

IV.3 SU(2) GRUBU TÜREV OPERATÖRLERİ

Geometrik simetriler yanında iç simetri adını verdiğimiz simetrik özelliklerde parçacıklar dünyasında mevcuttur. Bu iç simetrilerin dinamik yapısına ayar grupları diyoruz.

Bu simetrilerin ilki elektromanyetik etkileşmeyle bilinen U(1) ayar simetrisidir. Bu simetrinin dinamik yapılaşmasını veren foton alış verişidir.

Zayıf etkileşmenin simetrisi SU(2) dir. Buradaki S herhangi bu dönüşümü veren matrisin veya operatörün determinantının 1 olduğunu söyler. Buda özel matristir. U ise dönüşüm matrisinin veya operatörünün bir uniter matris veya uniter operatör olduğunu ifade eder. 2 sayısı ise dönüşüm matrisinin 2×2 lik bir kare matris oldugunu söyler.

$$\left(U^*\right)^T = U^\dagger$$

$$U^\dagger U = I \qquad \text{(Uniter matris)}$$

$$U^\dagger = U^{-1}$$

Eğer zayıf etkileşmede bir durum, bir hal, bir yapı Ψ ile gösteriliyor ise buradaki Ψ alanı iki boyutlu sütun matrisi özelliği de gösterir.

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_{11} \\ \Psi_{12} \end{pmatrix} \; (\Psi \rightarrow \text{Zayıf etkileşmede bir hal,yapı})$$

$$\left.\begin{array}{l} \Psi^\dagger \Psi = I \\ \Psi^\dagger = U\Psi \end{array}\right. \quad \text{oluyorsa}$$

$$\Psi'^\dagger\, \Psi' = \Psi^\dagger \Psi \quad \text{korunumu sağlanmalıdır.}$$

Bu özellik bize zayıf etkileşmeler için 3 korunan büyüklüğün yeterli olduğunu söyler. Bunun karşılığı olarak bu etkileşmeyi verecek dinamik yapı en fazla 3 ana parçacıktan oluşur.

$$\Psi'^\dagger = \left(U\Psi\right)^\dagger = \Psi^\dagger U^\dagger$$

$$\Psi'^\dagger\, \Psi' = \Psi^\dagger U^\dagger U \Psi = \Psi^\dagger \Psi \qquad U^\dagger U = 1$$

Şimdi bu dönüşümü ifade eden Lie operatörünü bulalım. U matrisi bir dönüşüm matrisidir ve grup özelliği gösterir. Ψ iki boyutlu, dönüşüm parametrelerimiz U matrisinin içinde;

$$\Psi = I\Psi$$

$$d\Psi + \Psi = (I + dU)\Psi$$

$$(I + dU)^\dagger (I + dU) = I$$

$$I + dU + dU^\dagger + dU^\dagger dU = I$$

$$dU + dU^\dagger \cong 0$$

$$dU \cong -dU^\dagger$$

dU matrisi yaklaşıklıkla bile olsa anti hermitsel matris özelliğini gösterir.

$d\Psi = dU\Psi$ 2×2 lik matrisi inşaa edelim

$$dU = \begin{vmatrix} a_1 + ia_2 & a_3 + ia_4 \\ a_5 + ia_6 & a_7 + ia_8 \end{vmatrix} \qquad dU^\dagger = \begin{vmatrix} a_1 - ia_2 & a_3 - ia_4 \\ a_5 - ia_6 & a_7 - ia_8 \end{vmatrix}$$

$dU \cong -dU^\dagger$ olduğundan

$a_1 + ia_2 = -a_1 + ia_2 \Rightarrow a_1 = -a_1 \Rightarrow 2a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 0 \qquad a_2 = a_2$

$a_3 + ia_4 = -a_5 + ia_6 \Rightarrow a_3 = -a_5 \qquad a_4 = a_6$

$a_5 + ia_6 = -a_3 + ia_4 \Rightarrow a_5 = -a_3 \qquad a_6 = a_4$

$a_7 + ia_8 = -a_7 + ia_8 \Rightarrow a_7 = 0 \qquad a_8 = a_8$

katsayılar matrisinin determinantı sıfırsa sonsuz çözümü ,değilse tek çözümü var.

$$\begin{matrix} a_3 + a_5 = 0 \\ a_3 + a_5 = 0 \end{matrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

katsayılar matrisini dU da yazalım;

$$dU = \begin{pmatrix} ia_2 & -a_5 + ia_6 \\ a_5 + ia_6 & a_8 \end{pmatrix} \qquad I + dU = \begin{pmatrix} 1 + ia_2 & -a_5 + ia_6 \\ a_5 + ia_6 & 1 + a_8 \end{pmatrix}$$

$\det U = 1$

$\det(I + dU) = 1$

$(1 + ia_2)(1 + ia_8) - (-a_5 + ia_6)(a_5 + ia_6) = 1$

$1 + ia_2 + ia_8 + ia_2 ia_8 + 0 \cong 1$

$ia_2 = -ia_8 \Rightarrow a_2 = -a_8$

matrisi yeniden yazalım

$$dU = \begin{pmatrix} -ia_8 & -a_5 + ia_6 \\ a_5 + ia_6 & ia_8 \end{pmatrix}$$

$$a_8 = da, a_5 = db, a_6 = dc$$

$$dU = \begin{pmatrix} -ida & -db + idc \\ db + idc & ida \end{pmatrix}$$

$$\Psi = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad d\Psi = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = dU \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ida & -db + idc \\ db + idc & ida \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$dx = -ixda - ydb + iydc$

$dy = xdb + ixdc + iyda$

$F = F(x, y)$ olduğundan $dF = dx\dfrac{\partial F}{\partial x} + dy\dfrac{\partial F}{\partial y}$

$$= da\left(-ix\frac{\partial}{\partial y} + iy\frac{\partial}{\partial y}\right)F + db\left(-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}\right)F + dc\left(iy\frac{\partial}{\partial x} + ix\frac{\partial}{\partial y}\right)F$$

$$J_1 = -ix\frac{\partial}{\partial x} + iy\frac{\partial}{\partial y} \qquad J_2 = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} \qquad J_3 = ix\frac{\partial}{\partial y} + iy\frac{\partial}{\partial x}$$

Bu üç operatörü aynı kuantum fiziğinde olduğu gibi korunan büyüklüklere karşılık gelen kuantum sayıları arasındaki bağımlı veya bağımsız ilişkileri verir. J_2 operatörü L_z operatörüdür.

Bu da SO(2) nm , SU(2) nin bir alt drubu olduğunu ifade eder. Zayıf etkileşmede spin kavramı kendiliğinden ortaya çıkar ki bunu izospin olarak genişletebiliriz

$[J_1, J_2], [J_2, J_3], [J_3, J_1]$

$[J_i, J_j] = C_{ijk} J_k$ (kapalılık özelliği gösterir) C_{ijk}'lar yapı sabitleridir ve kuantum sayılarının alabileceği değerleri gösterirler.

$$\lfloor J_i, J_j \rfloor$$

$$\left[\left(-ix\frac{\partial}{\partial x}+iy\frac{\partial}{\partial y}\right),\left(x\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]$$

$$=\left[-ix\frac{\partial}{\partial x},x\frac{\partial}{\partial y}\right]+\left[-x\frac{\partial}{\partial x},-y\frac{\partial}{\partial x}\right]+\left[iy\frac{\partial}{\partial y},x\frac{\partial}{\partial y}\right]+\left[iy\frac{\partial}{\partial y},-y\frac{\partial}{\partial x}\right]$$

$$\left[-ix\frac{\partial}{\partial x},x\frac{\partial}{\partial y}\right]J=-ix\frac{\partial}{\partial y}$$

$$=-ix\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial J}{\partial y}\right)-x\frac{\partial}{\partial y}\left(-ix\frac{\partial J}{\partial x}\right)$$

$$=-ix\frac{\partial J}{\partial y}-ix^2\frac{\partial^2 J}{\partial x\partial y}+ix^2\frac{\partial^2 J}{\partial y\partial x}$$

$$\left[-ix\frac{\partial}{\partial x},-y\frac{\partial}{\partial x}\right]J=-iy\frac{\partial}{\partial x}$$

$$-ix\frac{\partial}{\partial x}\left(-y\frac{\partial J}{\partial x}\right)+y\frac{\partial}{\partial x}\left(-ix\frac{\partial J}{\partial x}\right)=ixy\frac{\partial^2 J}{\partial y^2}-ix\frac{\partial J}{\partial y}-ixy\frac{\partial^2 J}{\partial y^2}$$

$$\left[iy\frac{\partial}{\partial y},x\frac{\partial}{\partial x}\right]y=-iy\frac{\partial}{\partial x}$$

$$iy\frac{\partial}{\partial y}\left(y\frac{\partial J}{\partial x}\right)+y\frac{\partial}{\partial x}\left(iy\frac{\partial J}{\partial y}\right)=iy\frac{\partial J}{\partial x}-iy^2\frac{\partial^2 J}{\partial y\partial x}-iy^2\frac{\partial^2 J}{\partial x\partial y}$$

$$[J_1,J_2]=-ix\frac{\partial}{\partial y}-iy\frac{\partial}{\partial x}-ix\frac{\partial}{\partial y}-iy\frac{\partial}{\partial x}$$

$$[J_1,J_2]=2\left(-ix\frac{\partial}{\partial y}-iy\frac{\partial}{\partial x}\right)=-2J_3$$

$C_{121}=0$ $C_{122}=0$ $C_{123}=-2$
$C_{211}=0$ $C_{212}=0$ $C_{213}=2$

IV.3 SU(3) GRUBU TÜREV OPERATÖRLERİ
Bu dönüşümün A matrisi 3x3 bir sanal matris olup, bu A matrisi kuantum büyüklüklerinin simetrik özellikleri nedeni ile üniter bir matristir ve özel bir matristir. Yani;
$X' = Ax$ dönüşümünde $A^{+}A = I$ ve detA=I dır.
Etkisiz dönüşüm civarındaki sonsuz küçük dönüşüm ise

SU(3) Gurubu ;S(special $|A| = 1$) ,U(üniterlik $A^{t}A = I$) , (3) boyut

$$3 \times 3 = 9, 9 \times 2 = 18, 18 - \underbrace{9}_{\text{üniterlik}} = 9, 9 - \underbrace{1}_{\det \to 1} = 8 \text{ jeneratör vardır.}$$

$$X' = AX$$

$$X = IX \Rightarrow X + dX = (I + dA)X \Rightarrow dX + dAX$$

dönüşümünde sonsuz küçük dönüşümü oluşturan elemanları sonsuz küçük parametrelerden oluşmuş dA matrisini

$$dA = \begin{pmatrix} a_0 + ia_1 & a_2 + ia_3 & a_4 + ia_5 \\ a_6 + ia_7 & a_8 + ia_9 & a_{10} + ia_{11} \\ a_{12} + ia_{13} & a_{14} + ia_{15} & a_{16} + ia_{17} \end{pmatrix}$$

şeklinde ifade edebiliriz. Burada a_i elemanları sonsuz küçük parametrelerdir. Bu dönüşümün özelliğinden
dA matrisi aşağıdaki özellikleri sağlamalıdır.

$$(I + dA)^{t}(I + dA) = I \qquad (I + dA^{t})(I + dA) = I \Rightarrow I + dA + dA^{t} + dA^{t}dA = I$$
$$\Rightarrow dA^{t} = -dA \qquad \det(I + dA) = 1$$

Bu özelliklerden dolayı dA matrisinin elemanları için;

$$\begin{aligned} a_6 - ia_7 &= -a_2 - ia_3 \\ a_2 - ia_3 &= -a_6 - ia_7 \end{aligned}$$ Bu iki terimin farkını alırsak $a_7 = a_3$ toplamını alırsak $a_6 = -a_2$

$$\begin{aligned} a_{12} - ia_{13} &= -a_4 - ia_5 \\ -a_{12} - ia_{13} &= a_4 - ia_5 \end{aligned}$$ Bu iki terimin farkını alırsak $a_{12} = -a_4$ toplamını alırsak $a_{13} = a_5$

$$\begin{aligned} a_{14} - ia_{15} &= -a_{10} - ia_{11} \\ -a_{14} - ia_{15} &= a_{10} - ia_{11} \end{aligned}$$ Bu iki terimin farkını alırsak $a_{14} = -a_{10}$ toplamını alırsak

$$a_{15} = a_{11}$$

bulunur.
Bu sonuçlara göre dA matrisini dokuz bağımsız parametre ile ifade edebiliriz. Yani

$$dA = \begin{pmatrix} ia_1 & a_2 + ia_3 & a_4 + ia_5 \\ -a_2 + ia_3 & ia_9 & a_{10} + ia_{11} \\ -a_4 + ia_5 & -a_{10} + ia_{11} & ia_{17} \end{pmatrix}$$

Şeklinde ifade edebiliriz. Ayrıca

$$\det(I+dA)=\begin{vmatrix} 1+ia_1 & a_2+ia_3 & a_4+ia_5 \\ -a_2+ia_3 & 1+ia_9 & a_{10}+ia_{11} \\ -a_4+ia_5 & -a_{10}+ia_{11} & 1+ia_{17} \end{vmatrix}=1$$

$$(1+ia_9+ia_1-a_1a_9)(1+ia_{17})=1$$

$$1+ia_{17}+ia_9-a_{17}a_9+ia_1-a_1a_{17}-a_1a_9-ia_1a_9a_{17}=1$$

$$ia_{17}+ia_9+ia_1=0$$

$$\Rightarrow a_{17}=-a_9-a_1$$

bulunur. Yukarıdaki hesaplarda a_i lerin sonsuz küçük olmaları nedeni ile kendi aralarında çarpımlarının sıfır
alınmıştır. Bu sonuçlada bir parametre daha düşer ve dA matrisini

$$dA=\begin{pmatrix} ia_1 & a_2+ia_3 & a_4+ia_5 \\ -a_2+ia_3 & ia_8 & a_6+ia_7 \\ -a_4+ia_5 & -a_6-ia_7 & -ia_1-ia_8 \end{pmatrix}$$

$$a_9=a_8, a_{10}=a_6, a_{11}=a_7$$

şeklinde tanımladık.
Daha önce yaptığımız örneklere benzer şekilde

$$dx_i=(dA)_{ij}x_j$$

$$\begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix}=(dA)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow dx_1=ia_1x_1+(a_2+ia_3)x_2+(a_4+ia_5)x_3$$

$$dx_2=(-a_2+ia_3)x_1+ia_8x_2+(a_6+ia_7)x_3$$

$$dx_3=(-a_4+ia_5)x_1+(-a_6+ia_7)x_2+(-ia_1-ia_8)x_3$$

$$dx_i=u_{ij}da_j$$

$$dx_1=u_{11}da_1+u_{12}da_2+u_{13}da_3+u_{14}da_4+u_{15}da_5+u_{16}da_6+u_{17}da_7+u_{18}da_8$$

$$dx_2=u_{21}da_1+u_{22}da_2+u_{23}da_3+u_{24}da_4+u_{25}da_5+u_{26}da_6+u_{27}da_7+u_{28}da_8$$

$$dx_3=u_{31}da_1+u_{32}da_2+u_{33}da_3+u_{34}da_4+u_{35}da_5+u_{36}da_6+u_{37}da_7+u_{38}da_8$$

$$\Rightarrow u_{11}=ix_1,\ \ u_{12}=x_2,\ \ u_{13}=ix_2,\ \ u_{14}=x_3$$

$$u_{15}=ix_3,\ \ u_{16}=0,\ \ u_{17}=0,\ \ u_{18}=0$$

$$u_{21}=0,\ \ u_{22}=-x_1,\ \ u_{23}=ix_1,\ \ u_{24}=0$$

$$u_{25}=0,\ \ u_{26}=x_3,\ \ u_{27}=ix_3,\ \ u_{28}=ix_2$$

$$u_{31}=-ix_3,\ \ u_{32}=0,\ \ u_{33}=0,\ \ u_{34}=-x_1$$

$$u_{35}=ix_1,\ \ u_{36}=-x_2,\ \ u_{37}=ix_2,\ \ u_{38}=-ix_3$$

olduğundan SU(3) dönüşüm grubunun türev operatörleri aşağıdaki şekilde bulunur.

$$X_1 = ix_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - ix_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \quad , \qquad X_2 = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \, ,$$

$$X_3 = ix_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + ix_1 \frac{\partial}{\partial x_2} , \qquad X_4 = x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_3} \, ,$$

$$X_5 = ix_3 \frac{\partial}{\partial x_1} + ix_1 \frac{\partial}{\partial x_3} \quad , \qquad X_6 = x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} ,$$

$$X_7 = ix_3 \frac{\partial}{\partial x_2} + ix_2 \frac{\partial}{\partial x_3} \quad , \qquad X_8 = ix_2 \frac{\partial}{\partial x_2} - ix_3 \frac{\partial}{\partial x_3} ,$$

ÖDEV: Benzer şekilde SU(4) grubunun türev operatörlerini bulunuz.

BÖLÜM IV

IV.4 SU(2) ve SU(3) SİMETRİ GRUPLARININ MATRİS GÖSTERİMLERİ VE ÖZELLİKLERİ

SU(2) Gurubunun üç tane jeneratörü vardır. Bunları aşağıdaki şekilde tanımlıyabiliriz.

$$\begin{Bmatrix} X_1 = -\frac{i}{2}s_x \\ X_2 = -\frac{i}{2}s_y \\ X_3 = -\frac{i}{2}s_z \end{Bmatrix} \qquad \begin{matrix} s_x, s_y, s_z \ \textit{Pauli spin matrisleri dir} \\ [A, B] = AB - BA \rightarrow \textit{Komütatör} \\ \langle A, B \rangle = AB + BA \rightarrow \textit{Antikomüta tör} \end{matrix}$$

Bunların bazı özellikleri ise

$a)[X_i, X_j] = C_{ijk} X_k \rightarrow$ *Daha* sonra ispatlanacak.

$$b)\{s_i, s_j\} = 2d_{ij}\ ,\ d_{ij} = \begin{Bmatrix} 1, \mathrm{i = j\ ise} & \mathrm{Dirac} \\ 0, \mathrm{i \neq j\,ise} & \mathrm{Notasyonu} \end{Bmatrix}$$

$\{s_1, s_2\} = 2d_{12} = 0$ *dır. Bunu ispatlayalım :*

Pauli

$$\textit{Sipin} \qquad s_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, s_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, s_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Matrisleri

$$\{s_1, s_2\} = s_1 s_2 + s_2 s_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & \mathrm{-i} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{bulunur}$$

$\{s_1, s_1\} = 2d_{11} = 2$ *dir.Bunu ispatlayalım.*

$$\{s_1, s_1\} = s_1 s_1 + s_1 s_1 = s^2 + s^2 = 2s_1^2 = 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2I$$

$c)[s_i, s_j] = 2ie_{ijk} s_k\ , e_{\mathrm{ijk}} \rightarrow \textit{Levi} - \textit{Civita}$ ijk $\rightarrow$ +1,-1 , iij $\rightarrow 0$

$[s_1, s_2] = 2ie_{12k} = 2i(e_{21}s_1 + e_{122}s_2 + e_{123}s_3) = 2is_3$ dir.Bunu ispatlayalım

$$[s_1, s_2] = s_1 s_2 - s_2 s_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{pmatrix} = 2i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 2is_3 \text{ olduğu görülür.}$$

$[s_1, s_1] = 2ie_{11k} s_k = 0 \Rightarrow s_1^2 - s_1^2 = 0$ dır.

$d)\ \mathrm{Tr}(s_{\mathrm{k}}) = 0$ dır.İzlerinin toplamı yani köşegen elemanlarının toplamı sıfırdır.

$e)\ \det(s_{k}) = -1$

$f)\ s_x^{\ 2} = s_y^{\ 2} = s_z^{\ 2} = I$

$g)\ s_x s_y = -s_y s_x = i s_z\ ,\ s_y s_z = -s_z s_y\ ,\ s_x s_z = -s_z s_x$

$h) Tr(s_i s_j) = 2d_{ij}$

$Tr(s_1 s_2) = 2d_{12} = 0$ *dır. Bunu ispatlayalım.*

$Tr\, s_1 s_2 = Tr\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = 0$ *olur.*

$Tr\, s_1 s_2 = 2d_{11} = 2$ *dir.* $\Rightarrow Tr\, s_1 s_1 = s_1^{\,2} TrI = 1Tr\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$ *bulunur.*

SU(3) grubu : Daha önce gösterdiğimiz gibi 8 tane jeneratörü vardır. Bunlara tekabül eden matrisler ise aşağıdaki gibidir.

$$l_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, l_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, l_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, l_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Gell Mann

$$l_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, l_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, l_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, l_8 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

matrisleri

Bu matrisler aşağıdaki şekilde yazıldığında komütasyon ilişkileri ve yapı sabitleri bulunur.

$F_a = \frac{1}{2} l_a\ ,\ \left[F_a, F_b\right] = \mathrm{i} f_{abg} F_g$

Şimdi l ların özelliklerini yazıyoruz.Bunlar F içinde geçerlidir.

$a)\left[l_a, l_b\right] = 2if_{abg}\ l_g$ dır.

$a)\left[l_a, l_b\right] = 2if_{abg}\, l_g$ dır.

$\left[l_1, l_2\right] = 2if_{12g}\, l_g = 2\mathrm{i}\left[f_{121} l_1 + f_{122} l_2 + f_{123} l_3 + f_{124} l_4 + f_{125} l_5 + f_{126} l_6 + f_{127} l_7 + f_{128} l_8\right]$

$$l_1 l_2 - l_2 l_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2i & 0 & 0\\ 0 & -2i & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=2i\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=2i\,l_3 \text{ olur. O halde denklemin iki tarafını eşitleyelim.}$$

αβγ	f_{abg}
123	1
147	1/2
156	–1/2
246	1/2
257	1/2
345	1/2
367	-1/2
458	$\sqrt{3}/2$
678	$\sqrt{3}/2$

$\Rightarrow f_{121}=f_{122}=f_{124}=f_{125}=f_{126}=f_{127}=f_{128}=0$ dır.

$\Rightarrow f_{123}=1$ dir. $\Rightarrow [l_1, l_2]=2if_{12g}\,l_g=2i\,l_3$

$b)\{l_a, l_b\}=\frac{4}{3}d_{ab}+2d_{abg}\,l_g$

Anti komütasyon ilişkisi ise

$\{l_1, l_4\}=\frac{4}{3}d_{14}+2d_{14g}\,l_g=2(d_{141}\,l_1+.......+d_{148}\,l_8)$

$$l_1 l_4+l_4 l_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=l_6$$

$l_6=2(d_{141}\,l_1+.........+d_{148}\,l_8)$

αβγ	f_{abg}
118	$1/\sqrt{3}$
146	1/2
157	1/2
228	$1/\sqrt{3}$
247	-1/2
256	1/2
338	$1/\sqrt{3}$
344	1/2
355	1/2
366	-1/2
377	-1/2
448	$-1/2\sqrt{3}$

$d_{146}=\frac{1}{2}\Rightarrow\{l_1, l_2\}=2.\frac{1}{2}\,l_6=l_6$ bulunur.

$\{l_1, l_1\}=\frac{4}{3}d_{11}+2d_{11g}\,l_g=\frac{4}{3}+2(d_{111}\,l_1+.......+d_{118}\,l_8)$

558 $-1/2\sqrt{3}$

668 $-1/2\sqrt{3}$

$$l_1^{\,2}+l_1^{\,2}=2l_1=2\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4/3&0&0\\0&4/3&0\\0&0&4/3\end{pmatrix}\right]=d_{111}l_1+d_{112}l_2+........+d_{118}l_8$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}1/3&0&0\\0&1/3&0\\0&0&-2/3\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{3}}l_8$$

$\Rightarrow d_{111}=d_{112}=d_{113}=d_{114}=d_{115}=d_{116}=d_{117}=0$ dır. $\mathrm{d}_{118}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Ayrıca bu SU(3) matrisleri aşağıdaki özelliklere sahiptir.

$c)\,Tr(l_a)=0$

$d)\,Tr(l_a l_b)=2d_{ab}$

$$Tr(l_4 l_5)=Tr\begin{pmatrix}i&0&0\\0&0&0\\0&0&-i\end{pmatrix}=0=2d_{45}=0$$

$$Tr(l_3 l_3)=2d_{33}=2\quad,\quad Tr(l_3 l_3)=Tr\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}=2$$

$e)\ Tr\left(l_a\left[l_b, l_g\right]\right)=4if_{abg}$

$$Tr\left(l_3\left[l_1, l_2\right]\right)=4if_{312}$$
$$Tr\,2i\,l_3\,l_3 = 4if_{312}$$

$$Tr\left[2i\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\right]=2i2=4i=4if_{312} \Rightarrow f_{312}=1 \quad \textit{Bunun sağlamasını yapalım.}$$

$$\left[l_3, l_1\right]=2\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=2i\begin{pmatrix}0 & -i & 0\\ i & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=2i\,l_2$$

$\left[l_3, l_1\right]=2i\,l_2=2if_{31g}\,l_g$ *Bu işlemleri yaparsak* $\Rightarrow$

$f_{311}=f_{313}=f_{314}=f_{315}=f_{316}=f_{317}=f_{318}=0\ ,\ f_{312}=1$ *bulunur.*

f) $Tr\left(l_a\left\{l_b, l_g\right\}\right)=4id_{abg}$ *olduğunu göster - 214 için yap.*

g) $det\left(l_a\right)=0$ *Ama* $det\,l_8 \neq 0$

ÖRNEK

Pauli Spin matrisini göstermek üzere $e^{is_y q} = ?$

matrisini bulunuz.Bu matrisin özdeğer ve özvektörlerini hesaplayınız.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\ldots\ldots \qquad x = is_y q \text{ diyelim.}$$

$$e^{is_y q} = \mathrm{I} + is_y q + \frac{(is_y q)^2}{2!} + \frac{(is_y q)^3}{3!} + \frac{(is_y q)^4}{4!} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \mathrm{I} + is_y q - \frac{q^2 \mathrm{I}}{2!} - \frac{is_y q^3}{3!} + \frac{q^4 \mathrm{I}}{4!} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \mathrm{I}\left(1 - \frac{q^2}{2!} + \frac{q^4}{4!} \ldots\ldots\ldots\right) + is_y\left(q - \frac{q^3}{3!} \ldots\ldots\right)$$

$$= \cos q \ \mathrm{I} + is_y \sin q \ \mathrm{I}$$

$$e^{is_y q} = \begin{pmatrix} \cos q & 0 \\ 0 & \cos q \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & -i\sin q \\ i\sin q & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos q & \sin q \\ -\sin q & \cos q \end{pmatrix} \text{ matrisi bulunur.}$$

Bu matrisin özdeğer ve özvektörlerini bulalım.

$$RX = lX \Rightarrow |R - lI| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \cos q - l & \sin q \\ -\sin q & \cos q - l \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\cos q - l)^2 + \sin^2 q = 0 \Rightarrow \cos^2 q + l^2 - 2l\cos q + \sin^2 q = 0$$

$$\Rightarrow l^2 - 2l\cos q + 1 = 0 \Rightarrow l_{1,2} = \cos q \pm \sqrt{\cos^2 q - 1}$$

$$l_{1,2} = \cos q \pm \sqrt{-\sin^2 q} = \cos q \pm i\sin q$$

Özdeğerler: $\quad l_1 = \cos q + i\sin q \quad , \quad l_2 = \cos q - i\sin q$

$$l_1 \; \textit{için} \; \begin{pmatrix} \cos q - e^{iq} & \sin q \\ -\sin q & \cos q - e^{iq} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{11} \\ X_{21} \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -i\sin q & \sin q \\ -\sin q & -i\sin q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{11} \\ X_{21} \end{pmatrix} = 0$$ *Bu matrisin rangı 1 dir.n = 2 dir.O halde n - 1 = 1 bağımsız cinsinden çöz*

$$\Rightarrow -i\sin q \; X_{11} + \sin q \; X_{21} = 0$$

$$-\sin q \; X_{11} - i\sin q \; X_{21} = 0 \qquad\qquad X_{21} = m \;\; \textit{diyelim}$$

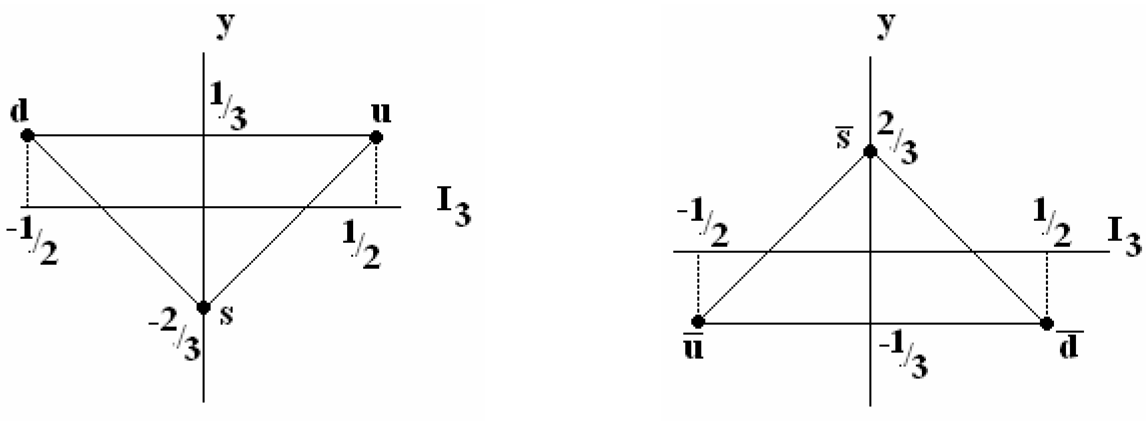
$$\Rightarrow .i\sin q \; X_{11} = \sin q \; m \Rightarrow X_{11} = -im$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} -im \\ m \end{pmatrix} \textit{bunu normlayalım} \;\; \textit{yani} \; X_1^{+} X_1 = 1 \;\; \textit{olmalıdır.}$$

$$\Rightarrow (im \quad m)\begin{pmatrix} -im \\ m \end{pmatrix} = 1 \;\; \Rightarrow \;\; mm + mm = 1 \qquad |m|^2 + |m|^2 = 1 \Rightarrow 2|m|^2 = 1 \Rightarrow |m|^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow m = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

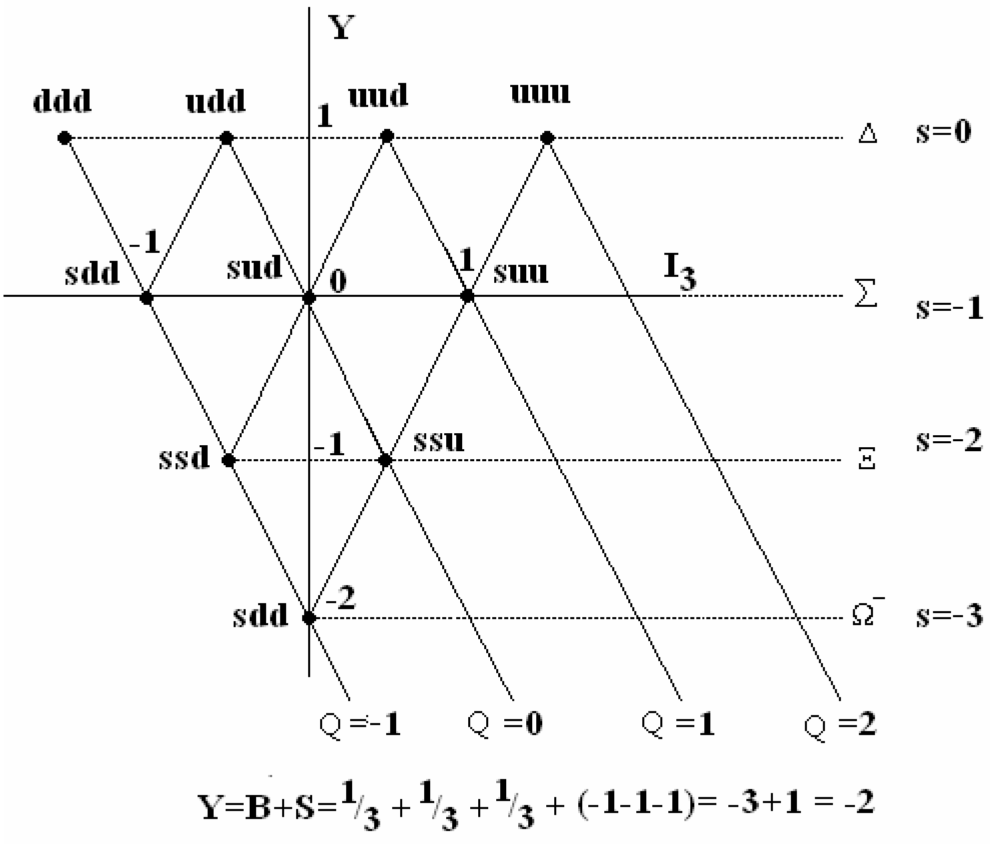
$$\Rightarrow \;\; X_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \quad , X_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\; \textit{bulunur.}$$

ŞEKİL I. Kuark ve anti kuarklar

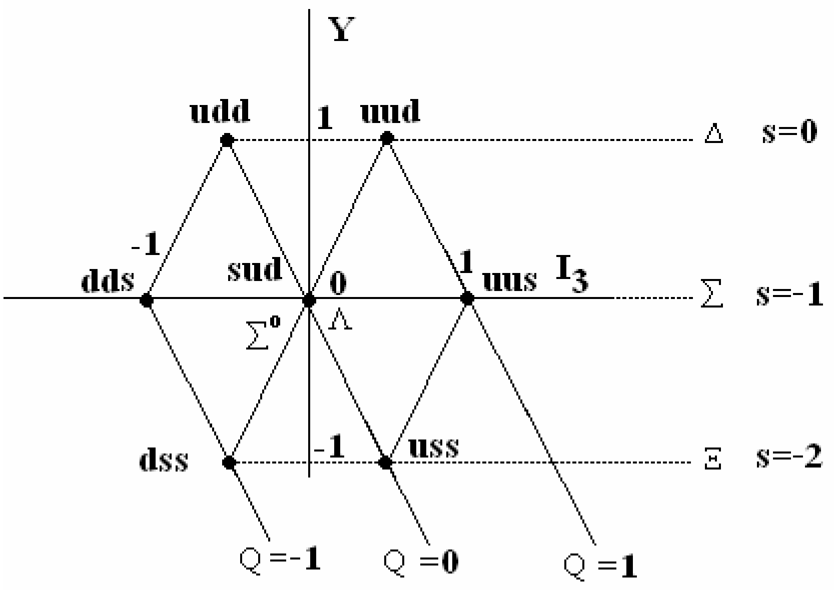


Bir kuark ile antisi Y ve I_3 ün zıt değerlerine sahip

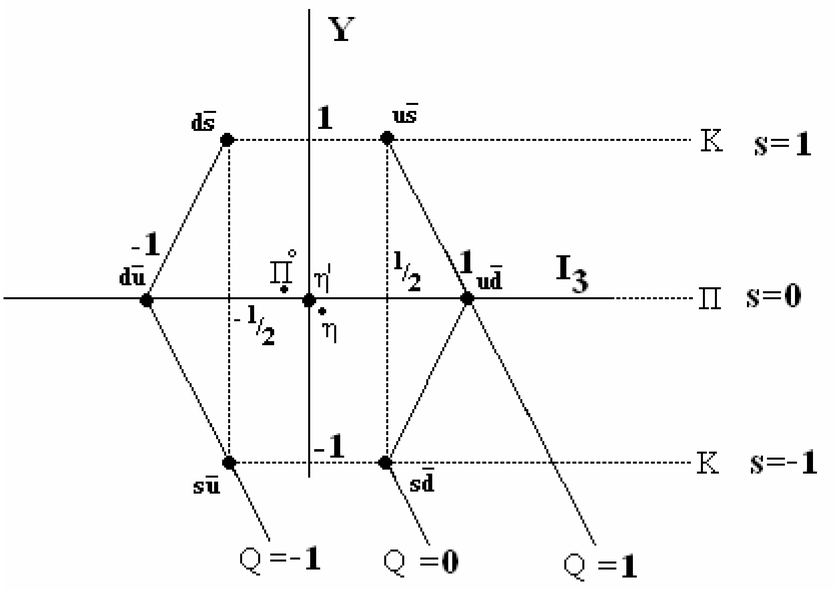
ŞEKİL II spini 3/2 olan baryonların decuplet yapısı



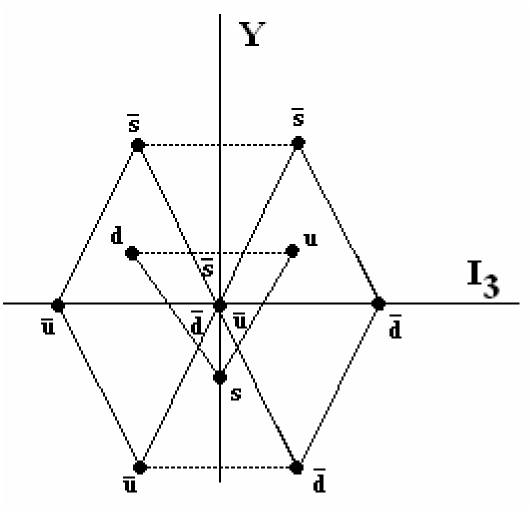
ŞEKİL III spini ½ olan baryonların oktet yapısı



ŞEKİL IV spini 0 olan Mezonların oktet yapısı



mezonlar için B=0 olduğundan
Y=B+S
Y=S


Y
$\bar{s}$
$\bar{s}$
d
u
$\bar{s}$
I_3
$\bar{u}$
$\bar{d}$
$\bar{u}$
$\bar{d}$
s
$\bar{u}$
$\bar{d}$

IV.5 PROBLEMLER

1- $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ve $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ Pauli spin matrisleri ve θ serbest bir parametre olmak üzere

A= $\sigma_x \; e^{i\frac{q}{4}s_z}$ matrisini oluşturup, bu matrisin özdeğer ve özvektörlerini bulunuz.

2- $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ve $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ Pauli spin matrisleri ve θ serbest bir parametre olmak üzere

A= $\sigma_x \; e^{i\frac{q}{4}s_z}$ matrisininin özvektörleri olmak üzere bir parçacığın dalga fonksiyonu

$\psi = \psi_1 e^{2x} + \psi_2 e^{-2x}$ ile verilmektedir. Bu parçacık için a) $\psi^+ (s_z \frac{\partial}{\partial x}) \psi$ ifadesini hesaplayınız

3- $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ve $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ Pauli spin matrisleri ve θ serbest bir parametre olmak üzere

A= $e^{-i\frac{q}{6}s_z} \; \sigma_x \; e^{i\frac{q}{6}s_z}$ matrisininin özvektörleri olmak üzere bir parçacığın dalga fonksiyonu

$\psi = \psi_1 \sin 2x + \psi_2 \cos 2x$ ile verilmektedir. Bu parçacık için $\psi^+ (s_z \frac{\partial}{\partial x}) \psi$ ifadesini hesaplayınız

4- $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ve $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ Pauli spin matrisleri ve θ serbest bir parametre olmak üzere

A= $\sigma_x \; e^{i\frac{q}{6}s_z}$ matrisininin özvektörleri olmak üzere bir parçacığın dalga fonksiyonu

$\psi = \psi_1 e^{(2x+it)} + \psi_2 e^{-(2x+it)}$ ile verilmektedir. Bu parçacık için a) $\psi^+ (\sigma_x \frac{\partial}{\partial t} - s_z \frac{\partial}{\partial x}) \psi$ akım yoğunluğunu , b) $< \sigma_x > = \psi^+ \sigma_x \psi$ beklenen değer ifadesini hesaplayınız

5- $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ve $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ Pauli spin matrisleri ve θ serbest bir parametre olmak üzere

A= $e^{-i\frac{q}{2}s_z} \; \sigma_x \; e^{i\frac{q}{2}s_z}$ matrisininin özvektörleri olmak üzere bir parçacığın dalga fonksiyonu $\psi = c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2$ ile verilmektedir. Bu parçacık için ; $< \sigma_x > = \psi^+ \sigma_x \psi$ ve $< \sigma_x > = \psi^+ \sigma_x \psi$ beklenen değer ifadelerini hesaplayınız

6-$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ve $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ Pauli spin matrisleri ve θ serbest bir parametredir. ψ_1 ve ψ_2

A = $e^{i\frac{q}{2}s_2} \; \sigma_1 \; e^{-i\frac{q}{2}s_2}$ matrisininin özvektörleri olmak üzere bir parçacığın dalga fonksiyonu

$\psi = \psi_1 e^{(x+it)} + \psi_2 e^{-(x+it)}$ ile verilmektedir. Bu parçacık için a) $\psi^+(\sigma_1 \frac{\partial}{\partial t} - s_2 \frac{\partial}{\partial x})\psi$ akım yoğunluğunu , b) < σ_1 > + < σ_2 > beklenen değer ifadesini hesaplayınız. (Burada < σ_i > = $\psi^+ \sigma_i \psi$ dir.)

7-$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ve $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ Pauli spin matrisleri ve θ serbest bir parametredir. ψ_1 ve ψ_2 A= $e^{i\frac{q}{2}s_2}$ matrisisininin özvektörleri olmak üzere bir parçacığın dalga fonksiyonu $\psi = \psi_1 \mathrm{Sin}(x - t) + \psi_2 \mathrm{Cos}(x - t)$ ile verilmektedir. Bu parçacık için < σ_1 > + < σ_2 > beklenen değer ifadesini hesaplayınız.
(Burada < σ_i > = $\psi^+ \sigma_i \psi$ dir.)

8-$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ve $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ Pauli spin matrisleri ve θ serbest bir parametredir. ψ_1 ve ψ_2

A = $e^{i\frac{q}{2}s_1} \; e^{-i\frac{q}{2}s_2}$ matrisisininin özvektörleri olmak üzere bir parçacığın dalga fonksiyonu

$\psi = \psi_1 \mathrm{Sin}(x-it) + \psi_2 \mathrm{Cos}(x-it)$ ile verilmektedir. Bu parçacık için < σ_1> = $\psi^+ \sigma_1 \psi$ beklenen değer ifadesini hesaplayınız.

9-$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ve $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ Pauli spin matrisleri ve θ serbest bir parametredir. ψ_1 ve ψ_2

A= $\sigma_x e^{i\frac{q}{6}s_z}$ matrisisininin özvektörleri olmak üzere bir parçacığın dalga fonksiyonu

$\psi = \psi_1 e^{(2x+it)} + \psi_2 e^{-(2x+it)}$ ile verilmektedir. Bu parçacık için $\psi^+ (\sigma_x \partial/\partial t - \sigma_z \partial/\partial x)\psi$ akım yoğunluğu ifadesini hesaplayınız.

10-$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ve $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ Pauli spin matrisleri ve θ serbest bir parametredir. ψ_1 ve ψ_2 A= $\sigma_1 e^{i\frac{q}{2}s_2}$ matrisisininin özvektörleri olmak üzere bir parçacığın dalga fonksiyonu $\psi = \psi_1 \mathrm{Sin}(x - 2t) + \psi_2 \mathrm{Cos}(x + 2t)$ ile verilmektedir. Bu parçacık için a) $\psi^+(\sigma_1 \frac{\partial}{\partial t} - s_2 \frac{\partial}{\partial x})\psi$ akım yoğunluğunu ,
b) < σ_1 > + < σ_2 > beklenen değer ifadesini hesaplayınız. (Burada < σ_i > = $\psi^+ \sigma_i \psi$ dir.)

11- $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ve $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ Pauli spin matrisleri ve θ serbest bir parametredir. ψ_1 ve ψ_2 A= $e^{i\frac{q}{4}s_1}$ matrisininin özvektörleri olmak üzere bir parçacığın dalga fonksiyonu $\psi = \psi_1 \mathrm{Sin}\,(2x - 3t) + \psi_2 \mathrm{Cos}\,(2x - 3t)$ ile verilmektedir. Bu parçacık için a) $\psi^+ (\sigma_1 \frac{\partial}{\partial t} - s_2 \frac{\partial}{\partial x})\,\psi$ akım yoğunluğunu ,

b) $<\sigma_1> + <\sigma_2>$ beklenen değer ifadesini hesaplayınız. (Burada $<\sigma_i> = \psi^+ \sigma_i \psi$ dir.)

12-C = $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ ve D = $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ matrisleri ve θ serbest bir parametre olmak üzere

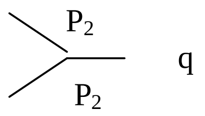
A= C $e^{i\frac{q}{8}D}$ matrisini oluşturup, bu matrisin özdeğer ve özvektörlerini bulunuz.

13-$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ve $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ Pauli spin matrisleri ve θ serbest bir parametredir. ψ_1 ve ψ_2 A= $e^{i\frac{q}{2}s_1}$ matrisininin özvektörleri olmak üzere bir parçacığın dalga fonksiyonu $\psi = \psi_1 \mathrm{Sin}\,(2x - t) + \psi_2 \mathrm{Cos}\,(2x - t)$ ile verilmektedir. Bu parçacık için $<\sigma_1>$ beklenen değer ifadesini hesaplayınız. (Burada $<\sigma_1> = \psi^+ \sigma_1 \psi$ dir.)

BÖLÜM V

V.1 FEYNMAN KURALLARI

Bozunum oranları ve saçılma tesir kesitlerini hesaplamak için M amplitünden yararlanıyoruz.
1) Gelen ve giden parçacıkların 4'lü momentumu $p_1, p_2,....p_n$ olsun ve ara parçacığın 4'lü momentumları $q_1, q_2,..., q_n$ olsun. Her bir çizgiye, pozitif doğrultuyu belirlemek için ok yerleştiriyoruz.



2) Her bir vertexiçin (-ig) şeklinde bir faktör yazacağız. g=bağlanma sabiti.

3) Her bir ara(iç) çizgi için $\dfrac{i}{q_i^2 - m_i^2 c^2}$ şeklinde bir faktör yazacağız.

4)Enerji ve momentum korunumu= Her bir vertex için bir delta fonksiyonu katsayısı yazacağız.

$$(2p)^4 d^4 (k_1 \text{ m } k_2 \text{ m } k_3) \qquad \begin{pmatrix} gelen + \\ giden - \end{pmatrix}$$

5) Ara momentumlar üzerinden integral alınacak. Her bir ara çizgi için $\dfrac{d^4 q}{(2p)^4}$ şeklinde bir katsayı yazılacak ve bütün ara momentumlar için integre edilecek.

6) Delta fonksiyonu ihmali. $(2p)^4 d^4 (p_1 + p_2 + ... + p_n)$ Bu terimi yok edip geriye kalan terime –iM diyeceğiz.

KUANTUM ELEKTRO DİNAMİĞİ (QED) İÇİN FEYNMAN KURALLARI

1) Notasyon: Gelen ve giden parçacıkların 4'lü momentumları $p_1, p_2,.., p_n$ ve sipinleri $s_1, s_2,.., s_n$ olsun. Ara parçacıkların momentumları $q_1, q_2,.., q_n$ olsun. Akış diyagramımızın doğrultusunu belirleyip okları yerleştiriyoruz.

Elektron * u gelen

* u giden

Pozitron * $\bar{v}$ gelen

* v gidiş

Photon * e^{m} geliş

e^{m*} gidiş

3) Vertex faktörleri: Her bir vertex için $ig_e g^m$ şeklinde bir faktör yazıcağız.

$$g_e = e\sqrt{4p/\mathbf{h}c} = \sqrt{4pa}$$

4) propagatör: Her bir ara çizgi için bir faktör yazacağız.

e^- veya pozitron $\dfrac{i\left(g^m q_m + mc\right)}{q^2 - m^2c^2}$, photon $-\dfrac{ig_{mn}}{q^2}$

5) Enerji ve momentum korunumu: Her bir vertex için bir delta fonksiyonu yazacağız.

$(2p)^4 d^4\left(k_1 \; \mathbf{m} \; k_2 \; \mathbf{m} \; k_3\right)$ (geliş +, gidiş -)

6) Her bir ara parçacık için momentum $\dfrac{d^4q}{(2p)^4}$ şeklinde bir faktör olacak ve integre edilecek.

7) Delta fonksiyonu yok edilecek.

$(2p)^4 d^4\left(p_1 + p_2 +,,+ p_n\right)$ Geriye kalana –iM denilecek.

8) Antisymmetrization: Gelen veya giden parçacıkların yerlerini değiştirisek yani 2. bir şekil varsa, ikinci şekilde çizilecek ve M amplitüdüne (-) ilave edilkecek.

KUANTUM CHROMODYNAMİCS(QCD) İÇİN FEYNMAN DİAGRAMLARI

1) Dış çizgiler: momentumu p, spini s ve rengi c olan

Quark * $u^{(s)}(p).c$ gelen

* $\bar{u}^{(s)}(p).c^+$ giden

Antiquark * $\bar{v}(p).c^+$ gelen

* $v(p).c$ gidiş

Gluon * $e^m(p)c^a$ geliş

$e^{m*}(p).c^{a*}$ gidiş

*

c: quarkın rengi ; $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ kırmızı, $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ mavi, $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ yeşil,

2) propagatör: Ara parçacık;

quark-anti quark için $\frac{i(q+mc)}{q^2-m^2c^2}$ gluon için $-\frac{ig_{mn}d^{ab}}{q^2}$ dir.

3) vertex katkısı

$-\frac{ig_s}{2}l^a g^b$ l , Gell Mann Matrisleri

ZAYIF ETKİLEŞME İÇİN FEYNMAN KURALLARI

1) Propagatör: (W, Z) $-\frac{i\left(g_{mn}-q_m q_n/m^2c^2\right)}{q^2-M^2c^2}$

$$q^2\langle\langle(Mc)^2 \Rightarrow -\frac{ig_{mn}}{(Mc)^2}$$

2) Vertex faktör

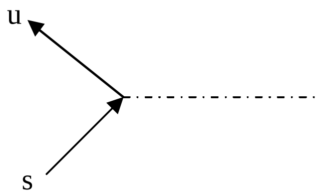
$$-\frac{ig_w}{2\sqrt{2}}g^m\left(1-g^5\right)$$

$g_w=\sqrt{4pa_w}$ Zayıf bağlanma sabiti.

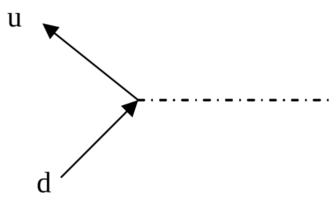
ÖNEMLİ NOKTALAR

1) Kuark yapı (sdu)'ların yanında rengi gösteren c'lerin olması lazım.
2) Kuarklarda açılarda hesaba katılır. D girip u çıkarsa Cos, s girip u çıkarsa Sin oluyor.
3) Kuark varsa zayıf etkileşme, yoksa EMT etkileşme. Elektromagnetik etkileşmede $e^{-}veyag$ ara parçacıktır.

Feynman Diagramlarında Kullanılan Tablo



Vertex katkısı : - $\frac{ig_w}{2\sqrt{2}} g^m (1 - g^5) Sin\, q_c$



Vertex katkısı : - $\frac{ig_w}{2\sqrt{2}} g^m (1 - g^5) Cos\, q_c$

Zo için Vertex katkısı : $\frac{-ig_z}{2} g^m (c_v^f - c_A^f g^5)$

f	c_V	C_A
ν_e , ν_μ , ν_τ	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
e^- , μ^- , τ^-	$-\frac{1}{2} + 2\, Sin\theta_w$	$-\frac{1}{2}$
u , c , t	$\frac{1}{2} - \frac{4}{3} Sin^2 q_w$	$\frac{1}{2}$
d , s , b	$-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} Sin^2 q_w$	$-\frac{1}{2}$

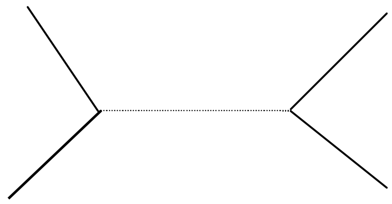
Propagator $W^{\pm}$, Zo için : $\frac{ig_{mn}}{(Mc)^2}$ ($q^2 << (Mc)^2$ için)

G.Akdeniz, *Temel Tanecikler* Ders Notları, Bölüm V. 2. Ek I

BÖLÜM V

V.2 FEYNMAN DİAGRAMLARI UYGULAMALARI

1) $p^{-} \rightarrow e^{-} + \overline{u}_{e}$ için Feynman diagramını çizip, bu diagrama göre M amplitüdünü(genliğini) yazınız.

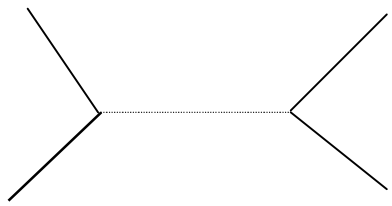


$$-iM = \left[\overline{U}(3)C_3^{+}\left(-\frac{ig_w}{2\sqrt{2}}g^{m}\left(1-g^{5}\right)Cosq_{c}\right)U(1)C_1\right]\frac{ig_{mJ}}{(Mc)^2}\left[\overline{U}(4)-\frac{ig_w}{2\sqrt{2}}g^{J}\left(1-g^{5}\right)U(2)\right]$$

$$-iM = -\frac{ig_w^2}{8(Mc)^2}\left[\overline{U}(3)C_3^{+}g^{m}\left(1-g^{5}\right)Cosq_{c}U(1)C_1\right]\left[\overline{U}(4)g_{m}\left(1-g^{5}\right)U(2)\right]$$

$$M = \frac{g_w^2}{8(Mc)^2}\left[\overline{U}(3)C_3^{+}g^{m}\left(1-g^{5}\right)Cosq_{c}U(1)C_1\right]\left[\overline{U}(4)g_{m}\left(1-g^{5}\right)U(2)\right]$$

2) $n_{m} + e^{-} \rightarrow m^{-} + n_{e}$ için Feynman diagramını çizip, bu diagrama göre M amplitüdünü(genliğini) yazınız.

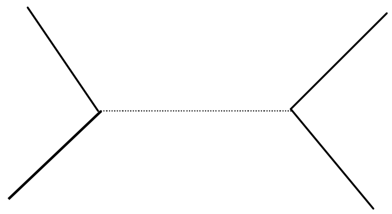


$$-iM = \left[\overline{U}(3)\left(-\frac{ig_w}{2\sqrt{2}}g^{m}\left(1-g^{5}\right)\right)U(1)\right]\frac{ig_{mn}}{(Mc)^2}\left[\overline{U}(4)-\frac{ig_w}{2\sqrt{2}}g^{J}\left(1-g^{5}\right)U(2)\right]$$

$$-iM = -\frac{ig_w^2}{8(Mc)^2}\left[\overline{U}(3)\left(g^{m}\left(1-g^{5}\right)\right)U(1)\right]\left[\overline{U}(4)g_{m}\left(1-g^{5}\right)U(2)\right]$$

$$M = \frac{g_w^2}{8(Mc)^2}\left[\overline{U}(3)\left(g^m\left(1-g^5\right)\right)U(1)\right]\left[\overline{U}(4)g_m\left(1-g^5\right)U(2)\right]$$

3) Çift oluşumu; $g + g \rightarrow e^+ + e^-$ için Feynman diagramını çizip, bu diagrama göre M amplitüdünü(genliğini) yazınız.
EMT etkileşme olduğu için ikinci bir şekil daha var.



$$-iM = \left[e^m(1)ig_e g^m V(3)\right]\frac{i\left(g^m q_m + mc\right)}{q^2 - m^2c^2}\left[e^m(2)ig_e g^n V(4)\right](2p)^4 d^4\left(p_1 - p_3 + q\right)$$

$$(2p)^4 d^4\left(p_2 - p_4 - q\right)$$

d^4 lü terimi integre edelim...

$$\int \frac{i\left(g^m q_m + mc\right)}{q^2 - m^2c^2}(2p)^4 d^4\left(p_1 - p_3 + q\right)(2p)^4 d^4\left(p_2 - p_4 - q\right)\frac{d^4q}{(2p)^4}$$

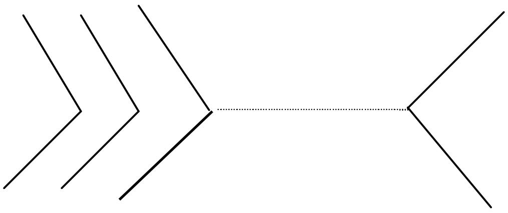
buradan $q = p_3 - p_1$ bulunur..

$$-iM = \left[e^m(1)ig_e g^m V(3)\right]\frac{i\left(g^m q_m + mc\right)}{\left(p_3 - p_1\right)^2 - m^2c^2}\left[e^m(2)ig_e g^n V(4)\right]$$

$$-iM = -\frac{ig_e^2\left(g^m q_m + mc\right)}{\left(p_3 - p_1\right)^2 - m^2c^2}\left[e^m(1)g^m V(3)\right]\left[e^m(2)ig_e g^n V(4)\right]$$

$$M = \frac{g_e^2\left(g^m q_m + mc\right)}{\left(p_3 - p_1\right)^2 - m^2c^2}\left[e^m(1)g^m V(3)\right]\left[e^m(2)ig_e g^n V(4)\right]$$

4) $\wedge^0 (uds) \rightarrow p(uud) + p^-(\bar{u}d)$ için Feynman diagramını çizip, bu diagrama göre M amplitüdünü(genliğini) yazınız.

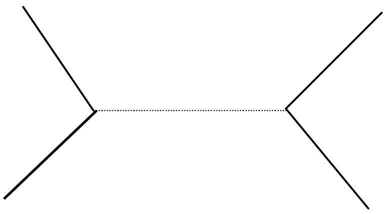


$$-iM=\left[\overline{U}(3)C_3^{+}\left(-\frac{ig_w}{2\sqrt{2}}g^{m}\left(1-g^{5}\right)Sinq_c\right)U(1)C_1\right]\frac{ig_{mJ}}{(Mc)^2}$$

$$\left[\overline{U}(4)C_4^{+}-\frac{ig_w}{2\sqrt{2}}g^{n}\left(1-g^{5}\right)Cosq_c U(2)C_2\right]$$

$$-iM=-\frac{ig_w^2}{8(Mc)^2}\left[\overline{U}(3)C_3^{+}\left(g^{m}\left(1-g^{5}\right)Sinq_c\right)U(1)C_1\right]\left[\overline{U}(4)C_4^{+}g_{m}\left(1-g^{5}\right)Cosq_c U(2)C_2\right]$$

5) $e^{+}+e^{-}\rightarrow u+\overline{u}$ Zayıf etkileşmesi için Feynman diagramını çizip, bu diagrama göre M amplitüdünü(genliğini) yazınız.

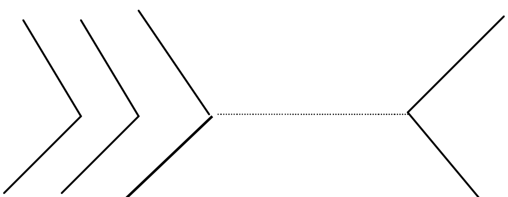


$$-iM=\left[\overline{V}(3)\left(-\frac{ig_z}{2}g^{m}\left(c_n^f-c_A^f g^{5}\right)\right)U(1)\right]\frac{ig_{mJ}}{(Mc)^2}\left[\overline{U}(4)C_4^{+}-\frac{ig_z}{2}g^{n}\left(c_n^f-c_A^f g^{5}\right)V(2)C(2)\right]$$

$$-iM=-i\frac{g_z^2}{4(Mc)^2}\left[\overline{V}(3)\left(g^{m}\left(c_n^f-c_A^f g^{5}\right)\right)U(1)\right]\left[\overline{U}(4)C_4^{+}g_{m}\left(c_n^f-c_A^f g^{5}\right)V(2)C(2)\right]$$

$$M=\frac{g_z^2}{4(Mc)^2}\left[\overline{V}(3)\left(g^{m}\left(c_n^f-c_A^f g^{5}\right)\right)U(1)\right]\left[\overline{U}(4)C_4^{+}g_{m}\left(c_n^f-c_A^f g^{5}\right)V(2)C(2)\right]$$

6) $\Delta^{0}(udd)\rightarrow p(uud)+p^{-}(\overline{u}d)$ için Feynman diagramını çizip, bu diagrama göre M amplitüdünü(genliğini) yazınız.



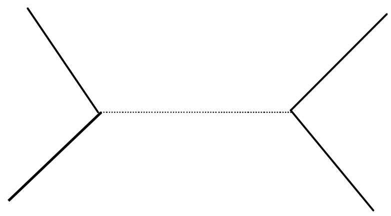
$$-iM=\left[\overline{U}(3)C_3^{+}\left(-\frac{ig_w}{2\sqrt{2}}g^{m}(1-g^{5})Sinq_c\right)U(1)C_1\right]\frac{ig_{mn}}{(Mc)^2}$$

$$\left[\overline{U}(4)C_4^{+}-\frac{ig_w}{2\sqrt{2}}g^{n}(1-g^{5})Cosq_cV(2)C_2\right]$$

$$-iM=-\frac{ig_w^2}{8(Mc)^2}\left[\overline{U}(3)C_3^{+}\left(g^{m}(1-g^{5})Sinq_c\right)U(1)C_1\right]\left[\overline{U}(4)C_4^{+}g_{m}(1-g^{5})Cosq_cV(2)C_2\right]$$

$$M=\frac{g_w^2}{8(Mc)^2}\left[\overline{U}(3)C_3^{+}\left(g^{m}(1-g^{5})Sinq_c\right)U(1)C_1\right]\left[\overline{U}(4)C_4^{+}g_{m}(1-g^{5})Cosq_cV(2)C_2\right]$$

7) $n_m + e^- \to n_m + e^-$ Zayıf etkileşmesi için Feynman diagramını çizip, bu diagrama göre M amplitüdünü(genliğini) yazınız.

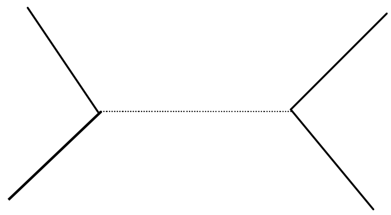


$$-iM=\left[\overline{U}(3)\left(-\frac{ig_z}{2}g^{m}\left(c_n^f-c_A^f g^{5}\right)\right)U(1)\right]\frac{ig_{mn}}{(Mc)^2}\left[\overline{U}(4)-\frac{ig_z}{2}g^{n}\left(c_n^f-c_A^f g^{5}\right)U(2)\right]$$

$$-iM=-\frac{ig_z^2}{4(Mc)^2}\left[\overline{U}(3)\left(g^{m}\left(c_n^f-c_A^f g^{5}\right)\right)U(1)\right]\left[\overline{U}(4)g_{m}\left(c_n^f-c_A^f g^{5}\right)U(2)\right]$$

$$M=\frac{g_z^2}{4(Mc)^2}\left[\overline{U}(3)\left(g^{m}\left(c_n^f-c_A^f g^{5}\right)\right)U(1)\right]\left[\overline{U}(4)g_{m}\left(c_n^f-c_A^f g^{5}\right)U(2)\right]$$

8) Aşağıdaki Feynman diagramı için etkileşme ifadesini yazıp, Feynman diagramına göre M amplitüdünü(genliğini) yazınız.



$$-iM=\left[e^{m*}(3)ig_e g^{m}U(1)\right]\frac{i\left(g^{m}q_m+mc\right)}{q^2-m^2c^2}\left[e^{m*}(4)ig_e g^{n}\overline{V}(2)\right](2p)^4 d^4\left(p_1-q-p_3\right)$$

$$(2p)^4 d^4\left(p_2+q-p_4\right)$$

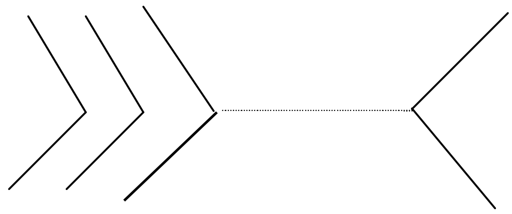
$$\int\frac{i\left(g^{m}q_m+mc\right)}{q^2-m^2c^2}(2p)^4 d^4\left(p_1-q-p_3\right)(2p)^4 d^4\left(p_2+q-p_4\right)\frac{d^4q}{(2p)^4}$$

$$q=p_4-p_2$$

$$-iM=-\frac{ig_e^2\left(g^{m}q_m+mc\right)}{\left(p_4-p_2\right)^2-m^2c^2}\left[e^{m*}(3)g^{m}U(1)\right]\left[e^{m*}(4)g^{n}\overline{V}(2)\right]$$

$$M=\frac{g_e^2\left(g^{m}q_m+mc\right)}{\left(p_4-p_2\right)^2-m^2c^2}\left[e^{m*}(3)g^{m}U(1)\right]\left[e^{m*}(4)g^{n}\overline{V}(2)\right]$$

9) $n(udd)\rightarrow p(uud)+e^-+\overline{n}_e$ için Feynman diagramını çizip, bu diagrama göre M amplitüdünü(genliğini) yazınız.

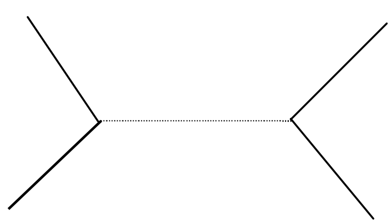


$$-iM=\left[\overline{U}(3)C_3^+\left(-\frac{ig_w}{2\sqrt{2}}g^{m}\left(1-g^5\right)Cosq_c\right)U(1)C_1\right]\frac{ig_{mn}}{(Mc)^2}\left[\overline{U}(4)-\frac{ig_w}{2\sqrt{2}}g^{q}\left(1-g^5\right)U(2)\right]$$

$$-iM=-\frac{ig_w^2}{8(Mc)^2}\left[\overline{U}(3)C_3^+\left(g^{m}\left(1-g^5\right)Cosq_c\right)U(1)C_1\right]\left[\overline{U}(4)g^{q}\left(1-g^5\right)U(2)\right]$$

$$M=\frac{g_w^2}{8(Mc)^2}\left[\overline{U}(3)C_3^+\left(g^{m}\left(1-g^5\right)Cosq_c\right)U(1)C_1\right]\left[\overline{U}(4)g^{q}\left(1-g^5\right)U(2)\right]$$

10) $e^++e^-\rightarrow e^++e^-$ için Feynman diagramını çizip, bu diagrama göre M amplitüdünü(genliğini) yazınız.



$$-iM=\left[\overline{U}(3)ig_e g^{m}U(1)\right]\frac{i\left(g^{m}q_{m}+mc\right)}{q^2-m^2c^2}\left[\overline{V}(4)ig_e g^{n}V(2)\right](2p)^4 d^4(p_1-q-p_3)$$

$$(2p)^4 d^4(p_4+q-p_2)$$

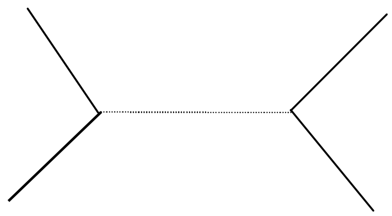
$$\int\frac{i\left(g^{m}q_{m}+mc\right)}{q^2-m^2c^2}(2p)^4 d^4(p_1-q-p_3)(2p)^4 d^4(p_4+q-p_2)\frac{d^4q}{(2p)^4}$$

$$q=p_1-p_3$$

$$-iM=-\frac{ig_e^2\left(g^{m}q_{m}+mc\right)}{(p_1-p_3)^2-m^2c^2}\left[\overline{U}(3)g^{m}U(1)\right]\left[\overline{V}(4)g^{n}V(2)\right]$$

$$M=\frac{g_e^2\left(g^{m}q_{m}+mc\right)}{(p_1-p_3)^2-m^2c^2}\left[\overline{U}(3)g^{m}U(1)\right]\left[\overline{V}(4)g^{n}V(2)\right]$$

11) $e^{+}+e^{-}\rightarrow d+\overline{d}$ için Feynman diagramını çizip, bu diagrama göre M amplitüdünü(genliğini) yazınız.



$$-iM=\left[\overline{V}(3)\left(-\frac{ig_z}{2}g^{m}\left(c_n^f-c_A^f g^5\right)\right)U(1)\right]\frac{ig_{mn}}{(Mc)^2}\left[\overline{U}(4)C_4^{+}-\frac{ig_z}{2}g^{n}\left(c_n^f-c_A^f g^5\right)U(2)C(2)\right]$$

$$-iM=-\frac{ig_z^2}{4(Mc)^2}\left[\overline{V}(3)\left(g^{m}\left(c_n^f-c_A^f g^5\right)\right)U(1)\right]\left[\overline{U}(4)C_4^{+}g^{n}\left(c_n^f-c_A^f g^5\right)U(2)C(2)\right]$$

$$M=\frac{g_z^2}{4(Mc)^2}\left[\overline{V}(3)\left(g^{m}\left(c_n^f-c_A^f g^5\right)\right)U(1)\right]\left[\overline{U}(4)C_4^{+}g^{n}\left(c_n^f-c_A^f g^5\right)U(2)C(2)\right]$$

KUANTUM ELEKTRO DİNAMİĞİ (QED) İÇİN FEYNMAN KURALLARI

Feynman kurallarını kullanarak amplititünü (M) bulabiliriz. Bozunum oranlarını ve saçılım tesir kesitlerini hesaplamak için M kullanılır.

ÖRNEK 1: $e^{-} + m \rightarrow e^{-} + m$

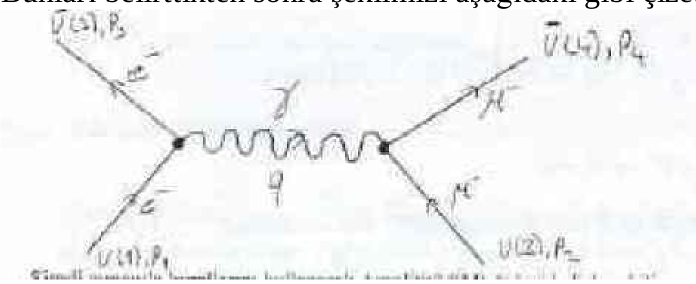
İlk önce, QED'nin 1. kuralı gereği; gelen ve giden parçacıkların 4'lü momentumları Sırası ile p_1, p_2, p_3, p_4 olsun. Ara parçacığımız foton (g) dur ve 4'lü momentumu q olarak gösterilir.

Feynman diyagramını çizmek için vertex noktalarına gelen ve giden parçacıklar yerleştirilir. Her parçacık kendi türünden parçacıkla eşleşir. Bu sebeple

1. vertex noktasına gelen ve giden parçacıklar elektronlardır.

2. vertex noktasına gelen ve giden parçacıklar ise müonlardır.

Feynman diyagramına U(1), U(2), U(3) ve U(4) parçacıkları sırasına göre yerleştirilir. U(3) ve U(4) vertexten çıkanları gösterdiği için üzerleri çizgilidir.
Bunları belirttikten sonra şeklimizi aşağıdaki gibi çizebiliriz.



Şimdi sırasıyla kurallarını kullanarak Amplititüd(M) değeri belirlenebilir.

1. vertex için $\left[\overline{U}(3)(ig_e g^{m})U(1)\right]$ yazılır. Buradaki $(ig_e g^{m})$ vertex faktörüdür.
   Sonra propagatör(taşıyıcı) katkısı yazılır. Ara parçacığımız foton olduğu için QED

Feynman kurallarından $\left(-\frac{ig_{mn}}{q^2}\right)$ yazılır. (ara parçacığı belirlerken vertexe gelen ve giden parçacıkları dikkate alarak, vertexde yük korunumuna bakılır. Bu örnekte yük korunumunu sağlamak için ara parçacığın foton olması gerekir.)

2. vertex için $\left[\overline{U}(4)(ig_e g^{n})U(2)\right]$ yazılır. Vertex faktöründe n indisi yazılır.

Enerji momentum korunumu için her bir vertexe ait bir delta fonksiyonu yazılır.
$(2p)^4 d^4(p_1 - p_3 - q)$ ve $(2p)^4 d^4(p_2 + q - p_4)$ bu fonksiyonlarda Feynman kurallarına uygu olarak yazılır.

Son olarak ara parçacık üzerinden integre edilir. $\int \frac{1}{(2p)^4} d^4 q$

Yazılanların hepsini birleştirirsek:

G. Akdeniz, *Temel tanecikler* Ders notları, Bölüm V.2 7. sayfa

$$\left[\overline{U}(3)(ig_e g^{m})U(1)\right]\left(-\frac{ig_{mn}}{q^2}\right)\left[\overline{U}(4)(ig_e g^{n})U(2)\right](2p)^4 d^4(p_1 - p_3 - q)$$
$$(2p)^4 d^4(p_2 + q - p_4)\int \frac{1}{(2p)^4} d^4 q$$

enerji-momentum korunumundan yararlanarak, ikinci vertex noktasında $q = p_4 - p_2$ yazılabilir. Böylece denklemimizde delta fonksiyonları yok olur ve kalan –iM' ye eşitlenir.

$$-iM = \left[\overline{U}(3)(ig_e g^{m})U(1)\right]\left(-\frac{ig_{mn}}{q^2}\right)\left[\overline{U}(4)(ig_e g^{n})U(2)\right]$$

$g_{mn} g^{n} = g_{m}$ olur.

$$M = -\frac{(g_e)^2}{(p_4 - p_2)^2}\left[\overline{U}(3)(g^{m})U(1)\right]\left[\overline{U}(4)(g_{m})U(2)\right]$$ bulunur.

ÖRNEK 2: $e^- + e^+ \rightarrow e^- + e^+$

İlk önce 1. kuralımız gereği; gelen ve giden parçacıkların 4'lü momentumları Sırası ile p_1, p_2, p_3, p_4 olsun. Ara parçacığımız foton (g) dur ve 4'lü momentumu q olarak gösterilir.

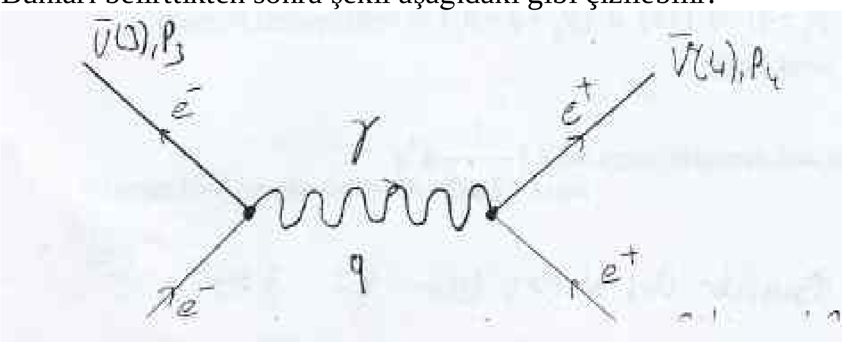
Feynman diyagramını çizmek için vertex noktalarına gelen ve giden parçacıklar yerleştirilir. Her parçacık kendi türünden parçacıkla eşleşir. Bu sebeple

1. vertex noktasına gelen ve giden parçacıklar elektronlardır.

2. vertex noktamıza gelen ve giden parçacıklar ise pozitronlardır.

Feynman diyagramına U(1), V(2), U(3) ve V(4) parçacıkları sırasına göre yerleştirilir. U(3) ve V(4) vertexten çıkanları gösterdiği için üzerleri çizgilidir.

Bunları belirttikten sonra şekil aşağıdaki gibi çizilebilir.



G. Akdeniz, *Temel tanecikler* Ders notları, Bölüm V.2 8. sayfa

Şimdi sırasıyla kuralları kullanarak denklem oluşturulur.

1. vertex için $\overline{U}(3)(ig_e g^m)U(1)$ yazılır. Buradaki $(ig_e g^m)$ vertex faktörüdür.

Sonra propagatör(taşıyıcı) katksı yazılır. Ara parçacığımız foton olduğu için Feynman kurallarından$(-\frac{ig_{mn}}{q^2})$ yazılır. Bu örnekte yük korunumunu sağlamak için ara parçacığın foton olması gerekir.

2. vertex için $\overline{V}(4)(ig_e g^n)V(2)$ yazılır. Vertex faktöründe indis olarak n yazılır.

Enerji momentum korunumu için her bir vertexe ait bir delta fonksiyonu yazılır. $(2p)^4 d^4(p_1 - p_3 - q)$ ve $(2p)^4 d^4(p_2 + q - p_4)$ bu fonksiyonlar kurallara uygun olarak yazılmalıdır.

Son olarak ara parçacık üzerinden integre edilir. $\int \frac{1}{(2p)^4} d^4 q$

Yazılanların hepsini birleştirirsek:

$$\left[\overline{U}(3)(ig_e g^m)U(1)\right]\left(-\frac{ig_{mn}}{q^2}\right)\left[\overline{V}(4)(ig_e g^n)V(2)\right](2p)^4 d^4(p_1 - p_3 - q)$$

$$(2p)^4 d^4(p_2 + q - p_4)\int \frac{1}{(2p)^4} d^4 q$$

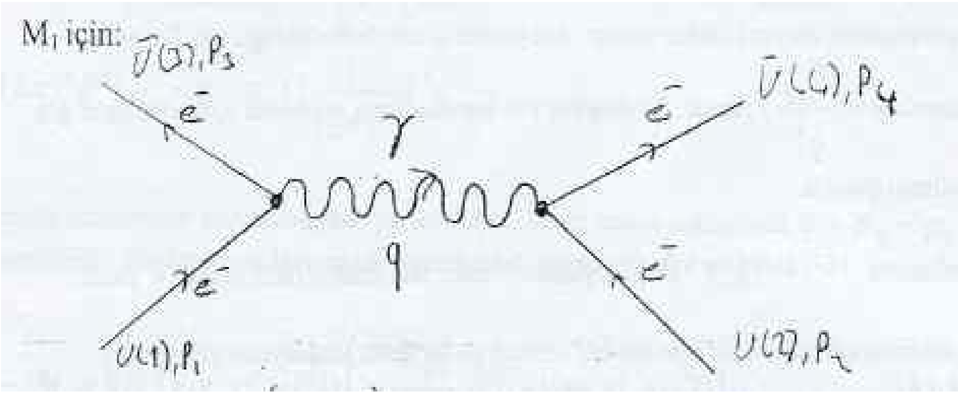
enerji-momentum korunumundan yararlanarak ikinci vertex noktasında $q = p_4 - p_2$ yazılabilir. Denklemimizde delta fonksiyonları yok edilir ve kalan –iM' ye eşitlenir.

$$-iM = \left[\overline{U}(3)(ig_e g^m)U(1)\right]\left(-\frac{ig_{mn}}{q^2}\right)\left[\overline{V}(4)(ig_e g^n)V(2)\right]$$

$g_{mn} g^n = g_m$ olur.

$$M = -\frac{(g_e)^2}{(p_4 - p_2)^2}\left[\overline{U}(3)(g^m)U(1)\right]\left[\overline{V}(4)(g_m)V(2)\right]$$ bulunur.

ÖRNEK 3. $e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-$
ilk iki örnekte olduğu gibi bütün işlemler tekrarlanır. Fakat burada iki farklı eşleşme olması mümkündür. Bu durumlarda her iki eşleşme için M_1 ve M_2 bulunur. M= M_1+M_2 olur. Bu örnekte yük korunumunu sağlamak için ara parçacığın foton olması gerekir.



$$\left[\overline{U}(3)\left(ig_e g^m\right)U(1)\right]\left(-\frac{ig_{mn}}{q^2}\right)\left[\overline{U}(4)\left(ig_e g^n\right)U(2)\right](2p)^4 d^4\left(p_1 - p_3 - q\right)$$

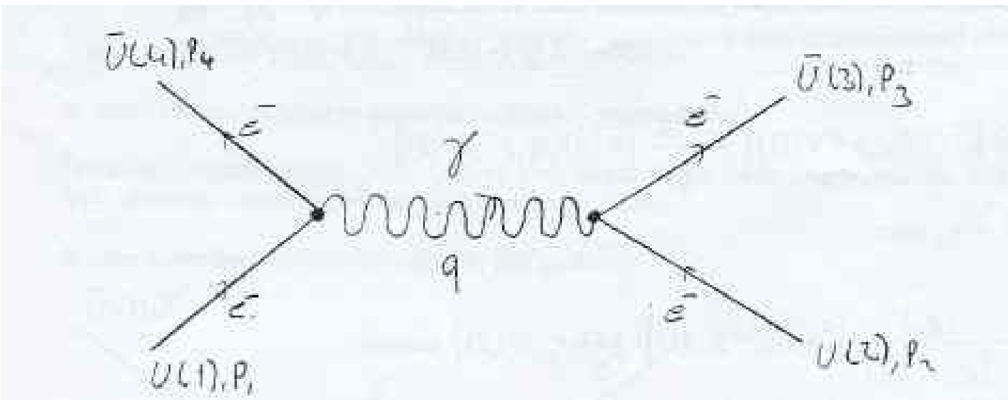
$$(2p)^4 d^4\left(p_2 + q - p_4\right)\int \frac{1}{(2p)^4} d^4 q$$

$q = p_1 - p_3$ ve $g_{mn} g^n = g_m$ yazılabilir.

$$M_1 = -\frac{(g_e)^2}{(p_1 - p_3)^2}\left[\overline{U}(3)\left(g^m\right)U(1)\right]\left[\overline{U}(4)\left(g_m\right)U(2)\right]$$

Olur.

M_2 için:



$$\left[\overline{U}(4)\left(ig_e g^{m}\right)U(1)\right]\left(-\frac{ig_{mn}}{q^2}\right)\left[\overline{U}(3)\left(ig_e g^{n}\right)U(2)\right](2p)^4 d^4\left(p_1-p_4-q\right)$$

$$(2p)^4 d^4\left(p_2+q-p_3\right)\int\frac{1}{(2p)^4}d^4q$$

$q = p_1 - p_4$ ve $g_{mn}g^{n} = g_{m}$ yazılabilir.

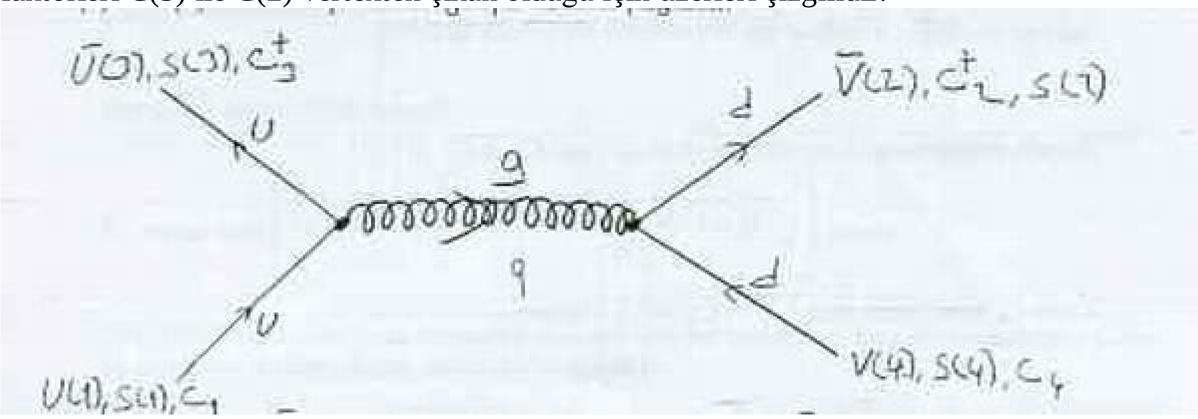
$$M_2 = -\frac{(g_e)^2}{(p_1-p_4)^2}\left[\overline{U}(4)\left(g^{m}\right)U(1)\right]\left[\overline{U}(3)\left(g_{m}\right)U(2)\right]$$

olarak bulunur.

KUANTUM CHROMO DİNAMİĞİ (QCD) İÇİN FEYNMAN KURALLARI

ÖRNEK 1. $u+\overline{d}\rightarrow u+\overline{d}$

P(momentum), S(spin), C(renk) olmak üzere bütün dış çizgileri belirterek diyagramımız aşağıdaki gibi yazılır. Aynı türden parçacıklar eşleştirilerek vertex noktalarında birleştirilir. Ara parçacığımız gluondur. Anti-kuarklar V ile gösterilir. U(3) ile V(2) ve bunların renk faktörleri C(3) ile C(2) vertexten çıkan olduğu için üzerleri çizgilidir.



1. vertex için $\left[\overline{U}(3)C_3^{+}\left(-\frac{ig_s}{2}l^{a}g^{m}\right)U(1)C_1\right]$ yazılır.

Propagatör(taşıyıcı) için ara parçacığımız gluon olduğundan $\left(-\frac{ig_{mn}d^{ab}}{q^2}\right)$

katkısı yazılır. Bu örnekte yük korunumunu sağlamak için ara parçacığın gluon olması gerekir.

2. vertex için $\left[\overline{V}(2)C_2^{+}\left(-\frac{ig_s}{2}\, l^b g^n\right)V(4)C_4\right]$ yazılır.

QED olduğu gibi enerji-momentum korunumu için her bir vertexe ait birer delta fonksiyonu yazılıp, sonra yok edilerek kalan ifade –iM’ye eşitlenir.

$$-iM = \left[\overline{U}(3)C_3^{+}\left(-\frac{ig_s}{2}\, l^a g^m\right)U(1)C_1\right]\left(-\frac{ig_{mn}d^{ab}}{q^2}\right)$$
$$\left[\overline{V}(2)C_2^{+}\left(-\frac{ig_s}{2}\, l^b g^n\right)V(4)C_4\right]$$

$g_{mn}g^n = g_m$ yazılabilir. Ve gerekli düzenlemeler yapıldığında denklem şu hale gelir.

$$M = -\frac{(g_s)^2}{(2q)^2}\left[\overline{U}(3)g^m U(1)\right]\left[\overline{V}(2)g_m V(4)\right]\left[C_3^{+} l^a C_1\right]\left[C_2^{+} l^a C_4\right]$$

Sonra $f = \frac{1}{4}\left[C_3^{+} l^a C_1\right]\left[C_2^{+} l^a C_4\right]$ olarak tanımlanır ve değeri bulunur.

Burada renklerimiz C_1 ve C_3 kırmızı olsun yani $C_1 = C_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

C_2 ve C_4 mavi olsun yani $C_2 = C_4 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ olur.

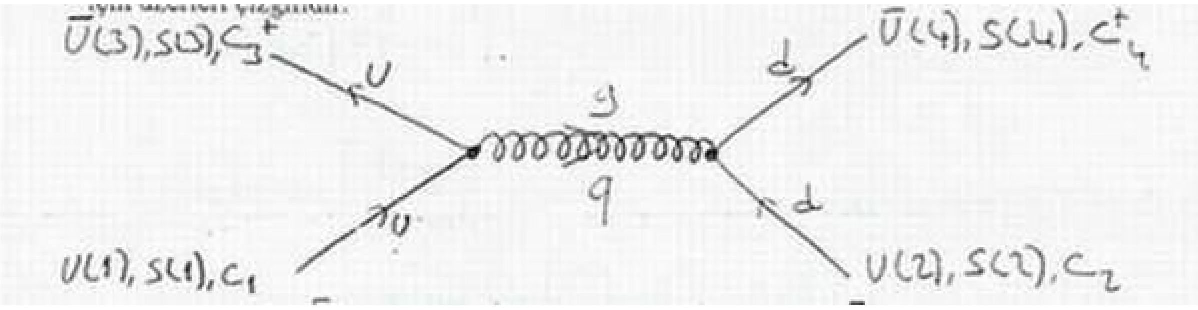
Bunları *f* de yerine koyarsak.

$$f = \frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix} l^a \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right]\left[\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix} l^a \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right] = \frac{1}{4}\, l_{11}^a l_{22}^a$$ burada birinci kare parantezde, birinci satır birinci sütunu 1 olan bir matris çıkar. İkinci kare parantezde ise ikinci satır ikinci sütunu 1 olan bir matris çıkar. l ’lar Gell-Man Matrisleridir. Bu matrislerin değerleri yerine konulursa sonuç aşağıdaki gibi olur.

$$f = \frac{1}{4}\left[l_{11}^{3} l_{22}^{3} + l_{11}^{8} l_{22}^{8}\right] = \frac{1}{4}\left[(1)(-1) + (\frac{1}{\sqrt{3}})(\frac{1}{\sqrt{3}})\right] = -\frac{1}{6}$$

ÖRNEK 2. $u + d \rightarrow u + d$

P(momentum), S(spin), C(renk) olmak üzere bütün dış çizgileri belirterek diyagramımız aşağıdaki gibi yazılır. Aynı parçacıklar eşleştirilerek vertex noktalarında birleştirilir. Ara parçacığımız gluondur. U(3) ile U(4) ve bunların renk faktörleri C_3 ile C_4 vertexten çıkan olduğu için üzerleri çizgilidir.



1. vertex için $\left[\overline{U}(3)C_3^{+}\left(-\frac{ig_s}{2}\, l^a g^m\right)U(1)C_1\right]$ yazılır.

Propagatör(taşıyıcı) için ara parçacığımız gluon olduğundan

$\left(-\frac{ig_{mn}\, d^{ab}}{q^2}\right)$ katkısı yazılır. Bu örnekte yük korunumunu sağlamak için ara parçacığın gluon olması gerekir.

2. vertex için $\left[\overline{U}(4)C_4^{+}\left(-\frac{ig_s}{2}\, l^b g^n\right)U(2)C_2\right]$ yazılır.

QED olduğu gibi enerji-momentum korunumu için her vertex için bir delta fonksiyonu yazılır ve sonra yok edilerek kalan ifade –iM'ye eşitlenir.

$$-iM = \left[\overline{U}(3)C_3^{+}\left(-\frac{ig_s}{2}\, l^a g^m\right)U(1)C_1\right]\left(-\frac{ig_{mn}d^{ab}}{q^2}\right)$$
$$\left[\overline{U}(4)C_4^{+}\left(-\frac{ig_s}{2}\, l^b g^n\right)U(2)C_2\right]$$

$g_{mn}g^{n} = g_{m}$ yazılabilir. Ve gerekli düzenlemeler yapıldığında denklem şu hale gelir.

$$M = -\frac{(g_s)^2}{(2q)^2}\left[\overline{U}(3)g^{m}U(1)\right]\left[\overline{U}(4)g_{m}U(2)\right]\left[C_3^{+}\,l^{a}\,C_1\right]\left[C_4^{+}\,l^{a}\,C_2\right]$$

Sonra $f = \frac{1}{4}\left[C_3^{+}\,l^{a}\,C_1\right]\left[C_4^{+}\,l^{a}\,C_2\right]$ olarak tanımlanır ve değeri bulunur.

Burada renklerimizC_1,C_2, C_3 ve C_4 kırmızı olsun yani

$$C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ olur.

Bunları f de yerine koyarsak.

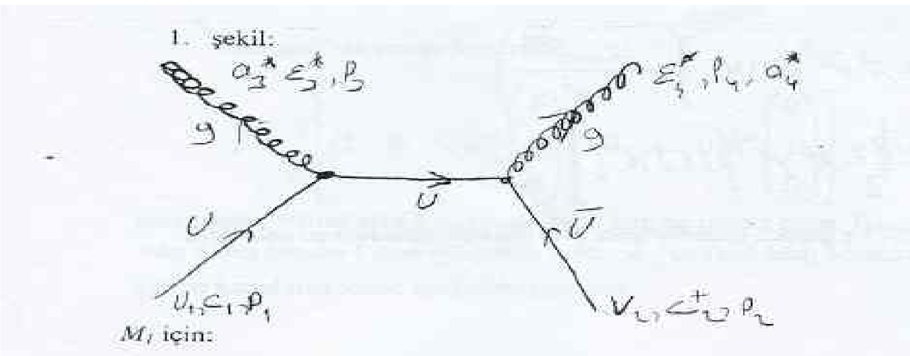
$$f = \frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} l^{a} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} l^{a} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{4}\, l_{11}^{a}\, l_{11}^{a}$$ burada birinci kare parantezde, birinci satır birinci sütunu 1 olan bir matris çıkar. İkinci kare parantezde ise birinci satır birinci sütunu 1 olan bir matris çıkar. l ’lar Gell-Man Matrisleridir.

$$f = \frac{1}{4}\left[l_{11}^{3}\,l_{11}^{3} + l_{11}^{8}\,l_{11}^{8}\right] = \frac{1}{4}\left[(1)(1) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right] = \frac{1}{3}$$

ÖRNEK 3. $u + \overline{u} \rightarrow g + g$

Bu etkileşme üç farklı şekilde olabilir. Her bir şekli bir önceki sorularda yapıldığı biçimde aşağıdaki şekilde çizilebilir.

1. şekil:



M_1 için:

Notasyonları uygun şekilde yerleştirerek diyagram çizilebilir. Bu durumda ara parçacığımız quarktır. Çünkü vertexe giren ve çıkan parçacıkların yükleri ancak bu şekilde eşitlenebilir.

1. vertex için; $\left[\overline{V}(2)C_2^{+}\left(-\frac{ig_s}{2}\, l^{b} g^{n}\right)\in_{4_n}^{*}\ a_4^{b*}\right]$ yazılır.

2. vertex için; $\left[\in_{3_m}^{*}\ a_3^{a*}\left(-\frac{ig_s}{2}\, l^{a} g^{m}\right)U(1)C_1\right]$ yazılır.

Propagatör için; $\left[\frac{i(q+mc)}{q^2-m^2c^2}\right]$ yazılır.

Enerji momentum korunumu için delta fonksiyonları tanımlanıp, yok edilirse ve kalan terim
–iM'ye eşitlenirse denklem aşağıdaki hale gelir

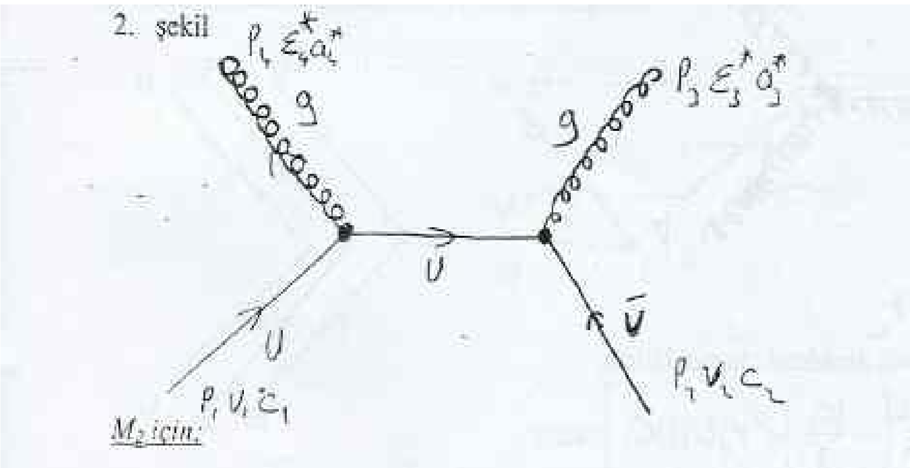
$$-iM=\left[\overline{V}(2)C_2^{+}\left(-\frac{ig_s}{2}\, l^{b} g^{n}\right)\in_{4_n}^{*}\ a_4^{b*}\right]\left(\frac{i(q+mc)}{q^2-m^2c^2}\right).$$

$$\left[\in_{3_m}^{*}\ a_3^{a*}\left(-\frac{ig_s}{2}\, l^{a} g^{m}\right)U(1)C_1\right]$$

Burada $q=p_1-p_3$ yazılarak yeniden düzenlenirse;

$$M_1=-\frac{g_s^2}{8}\frac{1}{p_1p_3}\overline{U}(2)[\in_4 (p_1-p_3+mc)\in_3]U(1)a_3^a a_4^b\left(C_2^{+} l^b\, l^a\, C_1\right)$$ olur.

2. şekil



Notasyonları uygun şekilde yerleştirerek diyagram çizilebilir. Bu durumda ara parçacığımız quarktır. Çünkü vertex noktalarında yükkorunmu ancak bu şekilde sağlanıyor.

1.vertex için; $\left[\in_{4_m}^{*}\ a_4^{a\,*}\left(-\frac{ig_s}{2}\ l^a g^m\right)U(1)C_1\right]$ yazılır.

2.vertex için; $\left[\overline{V}(2)C_2^{+}\left(-\frac{ig_s}{2}\ l^b g^n\right)\in_{3_n}^{*}\ a_3^{b\,*}\right]$ yazılır.

Propagatör için; $\left[\frac{i(q+mc)}{q^2-m^2c^2}\right]$ yazılır.

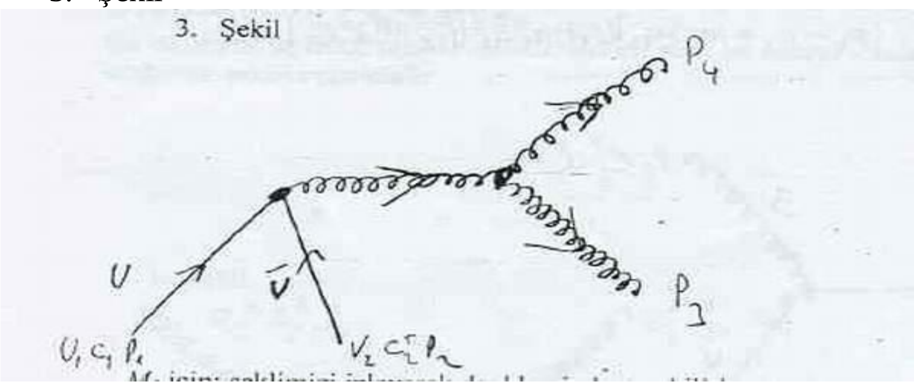
Enerji momentum korunumu için delta fonksiyonları tanımlanıp, yok edilirse ve kalan terim
–iM'ye eşitlenirse denklem aşağıdaki hale gelir

$$-iM=\left[\in_{4_m}^{*}\ a_4^{a\,*}\left(-\frac{ig_s}{2}\ l^a g^m\right)U(1)C_1\right]\left(\frac{i(q+mc)}{q^2-m^2c^2}\right).$$
$$\left[\overline{V}(2)C_2^{+}\left(-\frac{ig_s}{2}\ l^b g^n\right)\in_{3_n}^{*}\ a_3^{b\,*}\right]$$

Burada $q=p_1-p_4$ yazılarak yeniden düzenlenirse;

$$M_2=-\frac{g_s^2}{8}\frac{1}{p_1p_4}\overline{U}(2)\left[\in_3\,(p_1-p_3+mc)\in_4\right]U(1)a_4^a\,a_3^b\left(C_2^{+}\,l^a\ l^b\,C_1\right)\text{ olur.}$$

3. Şekil



M_3 için; şeklimizi izleyerek denklemi oluşturabiliriz.

1. vertex için; $\left[\overline{U}(2)C_2^{+}\left(-\frac{ig_s}{2}\right)l^d g_s U(1)C_1\right]$yazılır.

2. vertex için;

$$\left[\in_3^m\ a_3^a\left\{-g_s f^{abg}\left[g_{mn}(p_4-p_3)_l+g_{nl}(-q-p_4)_m+g_{lm}(q+p_3)_n\right]\right\}\in_4^n\ a_4^b\right]$$

Propagatör için; $\left[-i\frac{g^{sl}d^{dg}}{q^2}\right]$ yazılır.

Burada $q = p_3 + p_4$ yazılabilir. Aynı zamanda $q^2 = 2p_3p_4$ yazılabilir. Denklem düzenlenirse aşağıdaki halini alır.

$$M_3 = i\frac{g_s^2}{4}\frac{1}{p_3p_4}\bar{U}(2)[(\in_3\in_4)(p_4 - p_3) + 2(p_3 \in_4)\in_3 - 2(p_4 \in_3)\in_4]U(1)$$
$$\times f^{abg} a_3^a a_4^b \left(C_2^+ l^g C_1\right)$$

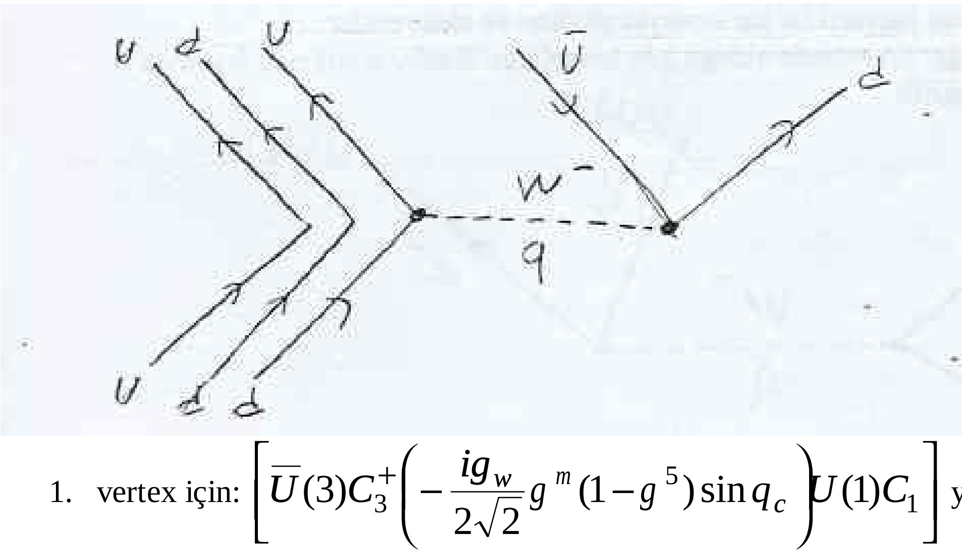
Olur.

Toplam M ise $M = M_1 + M_2 + M_3$ şeklinde tanımlanır.

ZAYIF ETKİLEŞME İÇİN FEYNMAN KURALLARI

ÖRNEK 1. $\Delta^0(udd) \rightarrow p(uud) + p^-(\bar{u}d)$

Feynman diyagramı aşağıdaki gibi çizilir. Pionun up kuarkı anti olduğu için sanki etkileşmeye giriyormuş gibi çizilir. Dolayısıyla 1 vertexe delta parçacığı girer proton çıkar, ikinci vertexe de pionun up kuarkı girer yine pionun down kuarkı çıkar. Ara parçacığımız W^- olu çünkü vertex noktalarında yük korunumu ancak bu şekilde sağlanır.



1. vertex için: $\left[\bar{U}(3)C_3^+\left(-\frac{ig_w}{2\sqrt{2}}g^m(1-g^5)\sin q_c\right)U(1)C_1\right]$ yazılır. d-kuarkı girip, u-kuarkı çıktığı için vertex katkısına $\sin q_c$ eklenir.

Ara parçacığımız W^- olduğundan, propagatör $\dfrac{ig_{mn}}{(Mc)^2}$ olur.

2. vertex için: $\left[\overline{U}(4)C_4^+\left(-\dfrac{ig_w}{2\sqrt{2}}g^n(1-g^5)\cos q_c\right)U(2)C_2\right]$ yazılır. u-kuarkı girip, d-kuarkı çıktığı için vertex katkısına $\cos q_c$ eklenir.

Delta fonksiyonlarını yazıp, integre ettikten sonra yok ederek kalanı $-iM$ ye eşitleriz. Denklemimiz aşağıdaki gibi olur.

$$-iM=\left[\overline{U}(3)C_3^+\left(-\frac{ig_w}{2\sqrt{2}}g^m(1-g^5)\sin q_c\right)U(1)C_1\right]\frac{ig_{mn}}{(Mc)^2}$$
$$\left[\overline{U}(4)C_4^+\left(-\frac{ig_w}{2\sqrt{2}}g^n(1-g^5)\cos q_c\right)U(2)C_2\right]$$

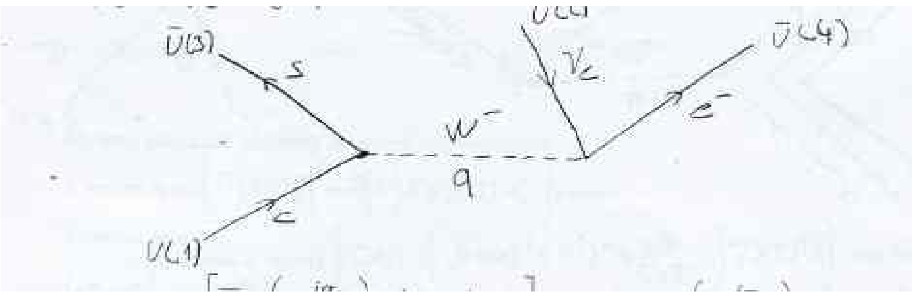
Denklem düzenlenirse;

$$M=\frac{g_w^2}{8(Mc)^2}\left[\overline{U}(3)C_3^+\left(g^m(1-g^5)\sin q_c\right)U(1)C_1\right]$$
$$\left[\overline{U}(4)C_4^+\left(g_m(1-g^5)\cos q_c\right)U(2)C_2\right] \text{ olur.}$$

ÖRNEK 2. $c\rightarrow s+e^-+n_e$

Charm parçacığının bozunumunda da zayıf etkileşme söz konusudur. Bozunumun feynman diyagramı çizilmek istenirse; aynı türden parçacıklar eşleştirilerek yapılabilir. Yani

Birinci vertex noktasına giren ve çıkan parçacıklar sırasıyla c ve s quarklarıdır.
İkinci veretxe giren ve çıkan parçacıklar ise sırasıyla nötrüno ve elektrondur.
Ara parçacık W⁻ olarak diğer örneklerde olduğu gibi hesaplanır. Bunların ışığında feynman diyagramı aşağıdaki gibi çizilir.



1 vertex için; $\left[\overline{U}(3)\left(-\dfrac{ig_w}{2\sqrt{2}}\right)g^m(1-g^5)U(1)\right]$ yazılır. Burada $\left(-\dfrac{ig_w}{2\sqrt{2}}\right)g^m(1-g^5)$ veretx faktörüdür.

2 vertex için $\left[\overline{U}(4)\left(-\frac{ig_w}{2\sqrt{2}}\right)g^n\left(1-g^5\right)U(2)\right]$ yazılır. Burada $\left(-\frac{ig_w}{2\sqrt{2}}\right)g^m\left(1-g^5\right)$ vertex faktörüdür.

Paropagatör için; $\left(-\frac{ig_{mn}}{(Mc)^2}\right)$ yazılır.

Enerji-momentum korunumu içi delta fonksiyonları yazılır. Delta foksiyonları her vertex için yazılır. $(2p)^4 d^4(p_1-p_3-q)$ ve $(2p)^4 d^4(p_{21}-p_4+q)$ yazılır. Ara momentumlar için integre edilip, delta fonksiyonu ihmal edilerek kalan terim –iM ye eşitlenir.

$$\left[\overline{U}(3)\left(-\frac{ig_w}{2\sqrt{2}}\right)g^m\left(1-g^5\right)U(1)\right]\left(-\frac{ig_{mn}}{(Mc)^2}\right)\left[\overline{U}(4)\left(-\frac{ig_w}{2\sqrt{2}}\right)g^n\left(1-g^5\right)U(2)\right]$$
$$(2p)^4 d^4(p_1-p_3-q)(2p)^4 d^4(p_{21}-p_4+q)\int\frac{d^4q}{(2p)^4}$$

burada $p_1=p_3+q$ yada $q=p_1-p_3$ yazılarak denklem düzenlenirse şu hale gelir.

$$M=\frac{(g_w)^2}{8(Mc)^2}\left[\overline{U}(3)\left(-\frac{ig_w}{2\sqrt{2}}\right)g^m\left(1-g^5\right)U(1)\right]\left[\overline{U}(4)\left(-\frac{ig_w}{2\sqrt{2}}\right)g_m\left(1-g^5\right)U(2)\right]$$

Olur.

BÖLÜM VI
ALAN TEORİLERİNE GİRİŞ
VI. 3 BAZI ALAN MODELLERİNDE İNSTANTON VE MERON ÇÖZÜMLERİ

Önceki kısımda Alan Modelleri hareket denklemlerinin klasik çözümlerin ele almış ve bu çözümlerin bir sınıflandırmasını yapmıştık. Ayrıca Konformal simetriye sahip alan modellerini gözden geçirmiş, konformal simetriyi kıran instanton ve meron tipi çözümleri ele almıştık ve bu çözümlerin fiziksel özelliklerini kısaca incelemiştik. Şimdi bu kısımda bazı konformal simetriye sahip alan modellerini gözden geçireceğiz ve bu modellerin instanton ve meron tipi çözümlerini bulacağız.

1-   Thiring Modeli (Ann. Phys. 3,91 (1958))

Konformal simetriye sahip olan Thiring Modeli iki (oklidyen ve uzay-zaman) boyutludur ve modelin Lagrange fonksiyonu

$$L = i\bar{y}\underbrace{\partial y}_{\substack{\text{Kinetik}\\ \text{terim}}} + g\underbrace{\left(\bar{y}y\right)^{2}}_{\substack{\text{Etkileşme}\\ \text{terimi}}}$$

dır. Burada;

$$y \rightarrow fermiyon\ \ alanı \qquad y = y\left(x_1, x_2\right) \qquad \bar{y} = (y)^{T}$$

$$\partial = \vec{s}.\vec{\partial} \quad s\ :\ Pauli\ spin\ matrisi$$

Modelin hareket denklemleri , Euler Lagrange formalizminden

1.Yol: $$\frac{\partial L}{\partial f} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^{m}}}_{\partial_m}\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_m f)}\right) \qquad \frac{\partial}{\partial x^{m}} = \partial_m \quad , \quad \frac{\partial}{\partial x_m} = \partial^{m}$$

olmak üzere ve iki y ve $\bar{y}$ alanları dikkate alındığında

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{y}} = \partial_m\left[\frac{\partial L}{\partial(\partial_m \bar{y})}\right]$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \partial_m\left[\frac{\partial L}{\partial(\partial_m y)}\right] \qquad i\bar{y}\partial y = i\bar{y}\vec{s}.\vec{\partial} y \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial(\partial y)} = i\bar{y}s$$

$$2g(\bar{y}y)\bar{y} = \partial_m\left[i\bar{y}s\right] = i\partial_m\bar{y}\vec{s}$$

$$\Rightarrow -i\partial_m\bar{y}\vec{s} + 2g(\bar{y}y)\bar{y} = 0 \quad \text{2. hareket denklemi.}$$

Konformal simetrinin $<0\,|\,\bar{\Psi}\Psi\,|\,0>\neq 0$ esinlenerek, $\psi = \frac{1+i\vec{s}.\vec{x}}{\left(1+x^2\right)^a}c \;\; \to$ instantan tipi bir ön çözüm düşünebiliriz. Burada c$\to$ sabit bir spinör alanı c= $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$dir.

(Bu konuda ve çözüm hakkında daha ayrıntılı bilgi için bakınız; G. Akdeniz and A. Smailagic, Nuovo CimentoA). 51,345 (1979)

$\not{\partial} = \vec{s}.\vec{\partial} \;\; , \vec{s} = s_1\vec{i} + s_2\vec{j} \to$ iki boyutta ,(4 boyutta olsaydı DİRAC matrisi γ lar gelirdi).

$$\vec{\partial} = \partial_1\vec{i} + \partial_2\vec{j}$$

$$\vec{s}.\vec{x} = s_1x_1 + s_2x_2 \quad , \quad \vec{x} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} \quad , \quad x^2 = x_1^{\,2} + x_2^{\,2}$$

İki hareket denklemi de aynı formda olduğundan, birinci denklemi ele alıyoruz.

$$i\not{\partial}\psi + 2g(\bar{\psi}\psi)\psi = 0$$

$$\bar{\psi} = \left(\psi^*\right)^T = \tilde{\psi}^* = \left(\left[\frac{1+i\vec{s}.\vec{x}}{\left(1+x^2\right)^a}c\right]^*\right)^T = \left[\frac{(1-i(\vec{s}.\vec{x})^*)c^*}{\left(1+x^2\right)^a}\right]^T = (c^*)^T\frac{\left[(1-i(\vec{s}.\vec{x})^*)\right]^T}{\left(1+x^2\right)^a}$$

$$(\vec{s}.\vec{x})^* = \tilde{s}_1^{\,*}x_1 + \tilde{s}_2^{\,*}x_2 = s_1x_1 + s_2x_2 = \vec{s}.\vec{x} \quad , \quad \left(s_1^{\,*}\right)^T = s_1 \quad \left(s_2^{\,*}\right)^T = s_2$$

$$\bar{\psi} = \bar{c}\frac{\left(1-i\vec{s}.\vec{x}\right)}{(1+x^2)^a} \quad \text{bulunur.}$$

Şimdi $\bar{\psi}\psi = ?$ bunu bulalım.

$$\bar{\psi}\psi = \bar{c}\frac{\left(1-i\vec{s}.\vec{x}\right)}{(1+x^2)^a}\frac{(1+i\vec{s}.\vec{x})}{\left(1+x^2\right)^a}c$$

$$(1-i\vec{s}.\vec{x})(1+i\vec{s}.\vec{x}) = 1-i\vec{s}.\vec{x}+i\vec{s}.\vec{x}+(\vec{s}.\vec{x})^2$$

$$(\vec{s}.\vec{x})^2 = (s_1x_1+s_2x_2)(s_1x_1+s_2x_2) = \underbrace{s_1^{\,2}}_{\mathrm{I}}x_1^{\,2} + \underbrace{s_1s_2}_{-s_2s_1}x_1x_2 + s_2s_1x_2x_1 + \underbrace{s_2^{\,2}}_{\mathrm{I}}x_2^{\,2}$$

$$= x_1^{\,2} + x_2^{\,2} = x^2$$

$$\bar{\psi}\psi = \bar{c}\frac{(1+x^2)}{(1+x^2)^{2a}}c = \frac{\bar{c}c}{(1+x^2)^{2a-1}} \quad \text{bulunur.} \qquad \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}, \partial_2 = \frac{\partial}{\partial x^2}$$

$$\not{\partial}\psi = (s_1\partial_1 + s_2\partial_2)\frac{\left[1+i(s_1x_1+s_2x_2)\right]c}{\left(1+x^2\right)^a} \quad ; \quad \frac{1}{(1+x^2)^a}\left[1+i\vec{s}.\vec{x}\right]c \text{ şeklinde}$$

düşünelim.

$$= -\frac{s_1a\left(1+x^2\right)^{a-1}2x_1}{\left(1+x^2\right)^{2a}}\left[1+i(s_1x_1+s_2x_2)\right]c - \frac{s_2a\left(1+x^2\right)^{a-1}2x_2}{\left(1+x^2\right)^{2a}}\left[1+i(s_1x_1+s_2x_2)\right]c$$

$$+\frac{1}{\left(1+x^2\right)^a}\left[i\underbrace{s_1^{\,2}}_{\mathrm{I}} + i\underbrace{s_2^{\,2}}_{\mathrm{I}}\right]c = -\frac{2a\left[s_1x_1 + i(s_1^{\,2}x_1^{\,2} + s_1s_2x_1x_2) + s_2x_2 + i(s_2s_1x_1x_2 + s_2^{\,2}x_2^{\,2})\right]}{(1+x^2)^{a+1}}c$$

$$+\frac{2ic}{(1+x^2)^a} = -\frac{2a\,(\vec{s}.\vec{x}+ix^2)c}{(1+x^2)^{a+1}} + \frac{2ic}{(1+x^2)^a}$$

Hareket denklemimiz:

$i\partial y + 2g(\bar{y}\, y)y = 0$ şeklindeydi. Yukarıda bulduklarımızı denklemde yerine koyarsak

$$-\frac{2ia(\vec{g}.\vec{x}+ix^2)c}{(1+x^2)^{a+1}}+\frac{2i^2c}{(1+x^2)^a}=-2g\frac{\bar{c}c}{(1+x^2)^{2a-1}}\frac{(1+i\vec{g}.\vec{x})c}{(1+x^2)^a}$$

$$-\frac{2ia(\vec{g}.\vec{x}+ix^2)c+2i^2(1+x^2)c}{(1+x^2)^{a+1}}=-2g\bar{c}c\frac{(1+i\vec{g}.\vec{x})c}{(1+x^2)^{3a-1}} \qquad a+1=3a-1\Rightarrow 2a=2\Rightarrow a=1$$

$$\Rightarrow \frac{i\left[2i+2ix^2(1-a)-2a\vec{g}.\vec{x}\right]c}{(1+x^2)^{a+1}}=-2g\bar{c}c\frac{(1+i\vec{g}.\vec{x})c}{(1+x^2)^{3a-1}}$$

$$\Rightarrow -2-2i\vec{g}.\vec{x}=-2g\bar{c}c(1+i\vec{g}.\vec{x})$$

$2(1+i\vec{g}.\vec{x})=2g\bar{c}c(1+i\vec{g}.\vec{x})\Rightarrow \bar{c}c=\dfrac{1}{g}$ $\quad \bar{c}c$; x'e bağlı çıkmamalı, x'e bağlı çıkarsa yanlıştır.

Böylece Thiring Modeli için $\Rightarrow y=\dfrac{1+i\vec{g}.\vec{x}}{1+x^2}c$ spinor tipi instanton çözümü bulunur.

Bu çözüm için Aksiyonu bulmak istersek:

$$S=A=\iint L\,d^2x$$

$$L=i\bar{y}\partial y+g(\bar{y}\,y)^2=i\frac{\bar{c}(1-i\vec{g}.\vec{x})}{1+x^2}\frac{2i(1+i\vec{g}.\vec{x})c}{(1+x^2)^2}+g\frac{(\bar{c}c)^2}{(1+x^2)^2}$$

$$=-\frac{2\bar{c}(1+x^2)c}{(1+x^2)^3}+g\frac{1}{g^2}\frac{1}{(1+x^2)^2}=-\frac{2\bar{c}c}{(1+x^2)^2}+\frac{1}{g}\frac{1}{(1+x^2)^2}$$ mertebeler eşit olmalı.

$$L=-\frac{1}{g}\frac{1}{(1+x^2)^2}$$

$$A=-\frac{1}{g}\iint\frac{1}{(1+x^2)^2}d^2x=-\frac{1}{g}\int_0^\infty\int_0^{2p}\frac{r\,dr\,dq}{(1+r^2)^2} \qquad x_1=r\sin q\ ,\ x_2=r\cos q\Rightarrow x^2=r^2$$

$$=-\frac{2p}{g}\underbrace{\int_0^\infty\frac{r\,dr}{(1+r^2)^2}}_{1/2}=-\frac{p}{g}$$

2- Sigma Modeli (İç Simetrili) : İki boyutlu, Konformal simetriye sahip olan Modelin lagrange fonksiyonu

$$L=\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{N}\left(\partial_m f_a\right)^2-\frac{m(x)}{2}\left[\sum_{a=1}^{N}f_a{}^2-1\right] \qquad f_a=f_a(x_1,x_2)$$

$;\sum_{a=1}^{N}f_a=1$

ile verilmektedir. (Bu model hakkında daha ayrıntılı bilgi için bakınız; V. de Alfora, E. Fubini and G. Furlan; Phys. Lett. 5B,163(1976)) . Bu modelin hareket denklemlerini bulunuz ve modelin

$$f_a = \frac{2x_m}{1+x^2} d_{ma} \quad a = 1,2 \quad f_3 = \frac{1-x^2}{1+x^2} \quad , \; f_a = 0 \quad ; \; a > 3$$

çözümleri olduğunu gösteriniz. Bu çözümler için aksiyonun sonlu olduğunu göstererek çözümlerin instanton özelliklerine sahip olduğunu kanıtlayınız.

Bu kez hareket denklemlerini varyasyon (modelin Lagrange fonksiyonunu minimize ederek) bulalım, yani

$$S = \int L d^2 x \qquad dS = 0 \rightarrow \text{(minimize etmek)}$$

$$dS = 0 = \int d\left[\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{N}\left(\partial_m f_a\right)^2 - \frac{m(x)}{2}\left(\sum_{a=1}^{N} f_a{}^2 - 1\right)\right] d^2 x = 0$$

$$= \int\left[\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{N} 2(\partial_m f_a) d(\partial^m f^a) - \frac{1}{2}\left(\sum_{a=1}^{N} f_a{}^2 - 1\right) dm(x) - \frac{m(x)}{2}\sum_{a=1}^{N} 2 f_a df^a\right] d^2 x = 0$$

$$dV = d\left(\partial^m f^a\right) \quad , \quad A_m{}^2 = A^m A_m \qquad \left(\partial_m f_a\right)^2 = \partial_m f_a \partial^m f^a$$

$$V = df^a \qquad u = \partial_m f_a \;, \; \text{du} = \partial^m \partial_m f_a = \Box f_a \qquad \int u dv = uv - \int v du$$

$$= \int\left[\sum_{a=1}^{N}(-\Box f_a) df^a - \frac{1}{2}\left(\sum_{a=1}^{N} f_a^2 - 1\right) dm(x) - m(x)\sum_{a=1}^{N} f_a df^a\right] d^2 x = 0$$

$$= \int\left[\sum_{a=1}^{N}\left(-\Box f_a - m(x) f_a\right) df^a - \frac{1}{2}\left(\sum_{a=1}^{N} f_a^2 - 1\right) dm(x)\right] d^2 x = 0$$

O halde hareket denklemlerimiz:

$$\sum_{a=1}^{N}(\Box f_a + m(x) f_a) = 0 \quad (1) \quad , \quad -\frac{1}{2}\left(\sum_{a=1}^{N} f_a^2 - 1\right) = 0 \Rightarrow \sum_{a=1}^{N} f_a^2 = 1 \quad (2)$$

(1) . denklemi soldan ϕ_α ile çarpalım

$$\sum_{a=1}^{N} f_a \Box f_a + m(x) \underbrace{\sum_{a=1}^{N} f_a^2}_{1 \;\; (2).\,\text{denk.}} = 0 \qquad m(x) = -\sum_{a=1}^{N} f_a \Box f_a \qquad \text{Bunu (1)de yerine koyalım.}$$

$$\Box f_a - \left(\sum_{b=1}^{N} f_b \Box f_b\right) f_a = 0$$

Bu denklemlerin çözümü için, aşağıdaki instanton tipi

$$f_a = \frac{2x_m}{1+x^2} d_{ma} \quad a = 1,2 \quad f_3 = \frac{1-x^2}{1+x^2} \quad , \; f_a = 0 \quad ; \; a > 3 \quad \text{çözümleri veriliyor.}$$

$$f_1 = \frac{2x_m}{1+x^2} d_{m1} = \frac{2x_1}{1+x^2} d_{11} + \frac{2x_2}{1+x^2} \underbrace{d_{21}}_{0} \quad \Rightarrow f_1 = \frac{2x_1}{1+x^2} \quad , \; f_2 = \frac{2x_2}{1+x^2}$$

$$\sum_{b=1}^{N} f_b \Box f_b = f_1 \Box f_1 + f_2 \Box f_2 + f_3 \Box f_3 + f_4 \Box f_4 + ...$$

$$\Box f_1 = \partial^m \partial_m f_1 = \partial^1 \partial_1 f_1 + \partial^2 \partial_2 f_1 = \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{2x_1}{1+x^2}\right) = \frac{2(1+x^2) - 2x_1 2x_1}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1+x^2) - 4x_1^2}{(1+x^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2} = \frac{(4x_1 - 8x_1)(1+x^2)^2 - \left[2(1+x^2) - 4x_1\right]2(1+x^2)2x_1}{(1+x^2)^4} = \frac{-12x_1(1+x^2) + 16x_1^3}{(1+x^2)^3}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = -\frac{2x_1 2x_2}{(1+x^2)^2} = -\frac{4x_1 x_2}{(1+x^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2} = \frac{(-4x_1)(1+x^2)^2 + 4x_1 x_2 2(1+x^2)2x_2}{(1+x^2)^4} = \frac{-4x_1(1+x^2) + 16x_1 x_2^2}{(1+x^2)^3}$$

$$\Rightarrow \Box f_1 = \frac{-16x_1(1+x^2) + 16x_1 x^2}{(1+x^2)^3}$$

$$\Rightarrow f_1 \Box f_1 = \frac{-32x_1^2(1+x^2) + 32x_1^2 x^2}{(1+x^2)^4}$$

$$\Rightarrow f_2 \Box f_2 = \frac{-32x_2^2(1+x^2) + 32x_2^2 x^2}{(1+x^2)^4}$$

$$\Box f_3 = \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_2^2}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = \frac{-2x_1(1+x^2) - (1-x^2)2x_1}{(1+x^2)^2} = \frac{-4x_1}{(1+x^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f_3}{\partial x_1{}^2} = \frac{-4(1+x^2) + 4x_1 2(1+x^2)2x_1}{(1+x^2)^4} = \frac{-4(1+x^2) + 16x_1^2}{(1+x^2)^3}$$

$$\frac{\partial^2 f_3}{\partial x_2{}^2} = \frac{-4(1+x^2) + 16x_2^2}{(1+x^2)^3}$$

$$\Rightarrow \Box f_3 = \frac{-8(1-x^2)}{(1+x^2)^3} \Rightarrow f_3 \Box f_3 = \frac{-8(1-x^2)^2}{(1+x^2)^4} \qquad \Rightarrow \sum_{b=1}^{N} f_b \Box f_b = -\frac{8}{(1+x^2)^2}$$ bulunur.

$$\Box f_a - \left(\sum_{b=1}^{N} f_b \Box f_b\right) f_a = 0$$

$\alpha=1$ için

$$\Box f_1 + \frac{8}{(1+x^2)^2} f_1 = 0\,(?)$$

$$\frac{-16x_1(1+x^2) + 16x_1 x^2}{(1+x^2)^3} + \frac{16x_1}{(1+x^2)^3} = \frac{-16x_1 - 16x_1 x^2 + 16x_1 x^2 + 16x_1}{(1+x^2)^3} = 0$$ çıkar.

$$\Box f_3 + \frac{8}{(1+x^2)^3} f_3 = 0\,(?)$$

$$\frac{-8\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^3}+\frac{8}{\left(1+x^2\right)^2}\frac{\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)}=0$$ olduğu görülür.

$$\text{L}=\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{N}\left(\partial_\mu f_a\right)^2-\frac{\mu(x)}{2}\left[\sum_{a=1}^{N}f^2-1\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\partial_\mu f_1\right)^2+\left(\partial_\mu f_2\right)^2+\left(\partial_\mu f_3\right)^2\right]-\frac{\mu(x)}{2}\left(f_1^2+f_2^2+f_3^2-1\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\partial_1 f_1\right)^2+\left(\partial_2 f_1\right)^2+\left(\partial_1 f_2\right)^2+\left(\partial_2 f_2\right)^2+\left(\partial_1 f_3\right)^2+\left(\partial_2 f_3\right)^2\right]-\frac{\mu(x)}{2}\left(\underbrace{f_1^2+f_2^2+f_3^2-1}_{0\text{ olur.}}\right)$$

$$f_1^2=\frac{4x_1^2}{(1+x^2)^2}\quad,\quad f_1^2=\frac{4x_2^2}{(1+x^2)^2}\quad,\ f_3^2=\frac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}$$

$$f_1^2+f_2^2+f_3^2=\frac{4x^2+1+x^4-2x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{x^4+2x^2+1}{(1+x^2)^2}=\frac{(1+x^2)^2}{(1+x^2)^2}=1$$

$\Rightarrow L=\dfrac{4}{(1+x^2)^2}$ bulunur. Buradan polar koordinatlarını da kullanarak,

$$\text{S}=4\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d^2x}{(1+x^2)^2}=4\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{r\,dr\,\text{d}\theta}{(1+r^2)^2}=8\pi\int_0^{\infty}\frac{r\,\text{dr}}{(1+r^2)^2}=4\pi$$

çözümler için sonlu aksiyon bulunur. Bu da çözümlerin instanton tipi çözümler olduğunun bir kanıtıdır.

3) f^{4} Teorisi

$$L=\frac{1}{2}\partial^{m} j\,\partial_{m} j-\frac{1}{2} m^{2} j^{2}+\frac{l}{4} j^{4}$$ Lagrange fonksiyonu ile bilinir.

a)Modelin hareket denklemini bulunuz.

b) Bu modelin tek boyutlu $j=ATghm\frac{\sqrt{x^{2}}}{\sqrt{2}}$ çözümü için A yı tayin ediniz.

Çözüm

a) $\frac{\partial L}{\partial_{m} j}=\partial_{m}\left[\frac{\partial L}{\partial\left(\partial_{m} j\right)}\right]$ m, x'e baglı olmadıgı için onu yazmadık.

$$\left(\partial_{m} j\right)^{2}=\partial_{m} j\,\partial^{m} j \qquad \left(\partial_{m} j\right)^{2}=\left(\partial^{m} j\right)^{2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial_{m} j}=-\frac{1}{2} m^{2} 2 j+\frac{l}{4} 4 j^{3}$$

$$\partial^{m}\left(\frac{\partial L}{\partial\left(\partial_{m} j\right)}\right)=\frac{2 \partial^{m}}{2} \partial_{m} j=\Box j \qquad \frac{\partial^{2} j}{\partial x^{2}}=\Box j$$

olduklarından, hareket denklemi

$$\Box j+m^{2} j-l j^{3}=0$$

bulunur.

b) Verilen cözüm için;

$$\frac{\partial j}{\partial x}=\frac{A m}{\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{x^{2}}}\left(1-T g^{2} h \frac{m \sqrt{x^{2}}}{\sqrt{2}}\right)$$

$$(TghU)^{\prime}=\frac{U^{\prime}}{(ChU)^{2}}=U^{\prime}\left(1-T g^{2} h U\right)$$

$$\frac{\partial^{2} j}{\partial x^{2}}=\frac{A m}{\sqrt{2}}\left(\frac{x^{2}}{\left(x^{2}\right)^{3/2}}-\frac{x^{2}}{\left(x^{2}\right)^{3/2}}\right)\left(1-T g^{2} h \frac{m \sqrt{x^{2}}}{\sqrt{2}}\right)-A \frac{m^{2} x^{2}}{x^{2}}\left(1-T g^{2} h \frac{m \sqrt{x^{2}}}{\sqrt{2}}\right) T g h \frac{m \sqrt{x^{2}}}{\sqrt{2}}$$

Bulduklarımızı hareket denkleminde yerine yazarsak

$$=-A m^{2}\left(1-T g^{2} h \frac{m \sqrt{x^{2}}}{\sqrt{2}}\right) T g h \frac{m \sqrt{x^{2}}}{\sqrt{2}}+m^{2} A T g h \frac{m \sqrt{x^{2}}}{\sqrt{2}}-l A^{3} T g^{3} h\left(\frac{m \sqrt{x^{2}}}{\sqrt{2}}\right)^{3}=0$$

$$=A m^{2} T g h \frac{m \sqrt{x^{2}}}{\sqrt{2}}\left[-1+T g^{2} h \frac{m \sqrt{x^{2}}}{\sqrt{2}}+1-\frac{l}{m^{2}} A^{2} T g^{2} h \frac{m \sqrt{x^{2}}}{\sqrt{2}}\right]$$

$$=m^{2} T g^{3} h \frac{m \sqrt{x^{2}}}{\sqrt{2}} A\left[\underbrace{1-\frac{l A^{2}}{m^{2}}}_{0}\right]=0$$

$$\Rightarrow \frac{l A^{2}}{m}=1 \qquad A=\mathbf{m} \frac{m}{\sqrt{l}}$$

G. Akdeniz, Temel Tanecikler Ders Notları Bölüm VI.3 7. sayfa

4) İki boyutlu , $L = \frac{1}{2}(\partial_m f)^2 + m^2 e^{bf}$ (Louville Modelinin) hareket denklemlerini bulunuz ve $f = A\ln\left[\frac{2}{m^2}\left(\frac{2B}{1+x^2}\right)^2\right]$ şeklindeki bir çözüm olabilmesi için b 'yı uygun seçerek A ve B arasındaki ilişkiyi bulunuz.. Aksiyonu hesaplayınız. (Burada $x^2 = x_1^2 + x_2^2$ dir.)

Hareket denklemi; S=$\int dLd^2x = 0$ yöntemiyle

$\Box f = m^2 b e^{bf}$ olarak bulunur.

Verilen

$f = A\ln\left[\frac{2}{m^2}\left(\frac{2B}{1+x^2}\right)^2\right]$ çözümünü hareket denkleminde yerine koyarsak.

$$\Box f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} = -\frac{4Ax_1}{1+x_1^2} \ , \ \frac{\partial f}{\partial x_2} = -\frac{4Ax_2}{1+x_2^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = -\frac{4A(1+x^2)+8Ax_1^2}{(1+x^2)^2} \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = -\frac{4A(1+x^2)+8Ax_2^2}{(1+x^2)^2}$$

$$\Box f = -\frac{8A(1+x^2)+8Ax^2}{(1+x^2)^2} = -\frac{8A}{(1+x^2)^2}$$

$$e^{bf} = \exp\left\{bA\ln\left\{\frac{2}{m^2}\left(\frac{2B}{(1+x^2)}\right)^2\right\}\right\} = \frac{2}{m^2}\left(\frac{2B}{1+x^2}\right)^2 \qquad bA = B \ , \ b = \frac{1}{A}$$

$$-\frac{8A}{(1+x^2)^2} = m^2\frac{B}{A}\left\{\frac{4}{m^2}\left(\frac{2B}{1+x^2}\right)^2\right\} \quad \Rightarrow \quad B^2 = -A^2 \ \text{ bulunur.}$$

Aksiyon hesabı için;

$f = A\ln\left\{\frac{2}{m^2}\left[\frac{A(-A^2)}{(1+x^2)^2}\right]^2\right\}$ *çözümünü Lagrange fonksiyonunda yerine yazarsak,*

$$L = \frac{1}{2}(\partial_m f)^2 + \frac{1}{2}(\partial_1 f)^2 + m^2\frac{8}{mf}\frac{-A^2}{(1+x^2)^2} = -\frac{8A^2(1+x^2)}{(1+x^2)^2}$$

$$S = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} L dx_1 dx_2 = -16pA^2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(1-R^2)}{(1-R^2)^2}Rdr = 32p^2A^2$$

$1-R^2 = 0 \Rightarrow R = \pm i \qquad m = 2$

$A_{-1}^1 = -\frac{1}{2} \qquad A_{-1}^2 = -\frac{1}{2} \qquad 2p,\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

G. Akdeniz, Temel Tanecikler Ders Notları Bölüm VI.3 8. sayfa

5) Ters işaretli süper simetrik model. (Akdeniz-Dane modeli)
(C. Dane and G. Akdeniz) Lett. in Math. Phys. 9,205(1985)

$$L=\frac{1}{2}\left(\partial_m f\right)^2+i\bar{y}\partial y+\frac{m^2}{b^2}e^{bf}+\frac{m}{2\sqrt{2}}e^{bf/2}y\bar{y}+g\left(y\bar{y}\right)^2 \qquad m=sbt$$

a) Hareket denklemlerini bulunuz?
b)

$$y=\frac{1+i\vec{g}.\vec{x}}{\left(1+x^2\right)}C \quad ve \quad f=\frac{1}{b}\ln\left\{\frac{2}{m^2}\left(\frac{2A}{1+x^2}\right)^2\right\} \quad veriliyor. \text{Bu çözümler için } A \text{ ve } C\bar{C} \text{ nedir?}$$

$$\int dLd^2x=0$$

$f, y, \bar{y}$ deg *işkenler*
üç hareket denklemi bulmalıyız.

$$0=\int dLd^2x=\frac{1}{2}2\partial_m fd\left(\partial_m f\right)+i\partial y d\bar{y}+i\bar{y}d\left(\partial y\right)+\frac{m^2}{b^2}be^{bf}df+\frac{m}{2\sqrt{2}}\frac{bf}{2}e^{bf/2}y\bar{y}df$$

$$+\frac{m}{2\sqrt{2}}e^{bf/2}yd\bar{y}+\frac{m}{2\sqrt{2}}e^{bf/2}\bar{y}dy+2g\left(y\bar{y}\right)yd\bar{y}+2g\left(\bar{y}y\right)\bar{y}dy$$

$$d\left(\partial_m f\right)=dv\rightarrow v=df$$

$$u=\partial_m f\rightarrow du=\partial^m\partial_m f=\Box f$$

$$\int udv=uv-\int vdu=-\int \Box fdf$$

$$i\bar{y}d\left(\partial y\right)=-\int i\partial\bar{y}dy$$

$$dy\rightarrow -i\partial\bar{y}+\frac{m}{2\sqrt{2}}e^{bf/2}\bar{y}+2g\left(y\bar{y}\right)\bar{y}=0$$

$$d\bar{y}\rightarrow i\partial y+\frac{m}{2\sqrt{2}}e^{bf/2}y+2g\left(y\bar{y}\right)y=0$$

$$df\rightarrow -\Box f+\frac{m^2}{b^2}be^{bf}+\frac{m}{2\sqrt{2}}\frac{b}{2}e^{bf/2}y\bar{y}=0$$

$$\bar{y}=\frac{\bar{C}\left(1-i\vec{g}.\vec{x}\right)}{1+x^2} \qquad y\bar{y}=\frac{C\bar{C}}{1+x^2} \qquad \partial y=\frac{2i\left(1+i\vec{g}.\vec{x}\right)C}{\left(1+x^2\right)^2}$$

$$\Box f=\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=-\frac{4x_1}{b\left(1+x^2\right)}\rightarrow\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}=-\frac{1}{b}\frac{4\left(1+x^2\right)-8x_1^2}{\left(1+x^2\right)^2}$$

$$\Box f=-\frac{8}{b\left(1+x^2\right)^2} \qquad x_1^2+x_2^2=x^2$$

$$\Box f=\frac{m^2}{b}e^{bf}+\frac{mb}{4\sqrt{2}}e^{-bf/2}\bar{y}y$$

G. Akdeniz, Temel Tanecikler Ders Notları Bölüm VI.3 9. sayfa

$$\left(e^{b\frac{f}{2}}\right)' = \sqrt{u} \qquad \left(e^{\ln u}\right)' = u$$

$$-\frac{8}{b\left(1+x^2\right)^2} = \frac{m^2}{b}\frac{2}{m^2}\left(\frac{2A}{1+x^2}\right)^2 + \frac{mb}{4\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{m}\left(\frac{2A}{1+x^2}\right)\frac{\bar{C}C}{1+x^2}$$

$$\bar{C}C = \frac{-16\left(1+A^2\right)}{b^2 A}$$

bulunur ve yerine yazarsak A için,

$$\left(b^2 - 32g\right)A^2 - 2b^2 A - 32g = 0$$

$$\Rightarrow A_{1,2} = \frac{2b^2 \mp \sqrt{4b^2 + 128g\left(b^2 - 32g\right)}}{2\left(b^2 - 32g\right)}$$

bulunur.

6) 4 boyutlu Konformal invaryant Gürsey Modeli (1956)

$$L = \frac{i}{2}\bar{y}\,\partial\, y + g\left(\bar{y}\, y\right)^{4/3}$$

Lagrange fonksiyonu ile verilir. Bu modelin
İnstanton tipi

$$y = \frac{a \pm ig.x}{\left(a^2 + x^2\right)^3} C$$

çözüm için $\left(\bar{C}C\right)^{1/3} = 3\, a/g$ olduğunu gösteriniz.

Meron tipi

$$y = \frac{1}{\left(x^2\right)^{3/4}}\left[1 \pm i\frac{g.x}{\left(x^2\right)^{1/2}}\right]$$

çözüm için $\left(2\bar{C}C\right)^{1/3} = \frac{9}{8}\frac{1}{g}$ olduğunu gözteriniz. (G.Akdeniz, Nuovo Cim. Lett. Vol. 33 , 40-44 (1982))

7) 2- Boyutlu bir gravitasyonel modelin Lagrange fonksiyonu

$L = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2\right] + ae^{bf}$ ile verilmektedir. Bu modelin instanton tipi çözümünün

$f = A\ln\left[B\left(\frac{C}{1+x^2+t^2}\right)^2\right]$ şeklinde bir logaritmik formda olabilmesi için A, B ve C arasındaki bağıntıyı a ve b cinsinden tayin ediniz.

BÖLÜM VI

ALAN TEORİLERİNE GİRİŞ

VI. 1 PARÇACIK FİZİĞİNDE ALAN TEORİLERİNE KISA BİR TARİHSEL GİRİŞ

1900 başlarında kuvantum fiziğinin ortaya çıkması ile 1926 yılında Schrödinger'in, Bohr tarafından keşfedilen bir atomdaki elektronların acayip davranışlarının de Broglie dalga teorisini kesin matematiksel denklemlere dönüştürmüş olması, yani küçük cisimlerin davranışının non-lineer "kuvantum dalga denklemleri" (Schrödinger Denklemi) ile belirlenebileceğinin anlaşılması ve 1930 lu yıllarda Dirac tarafından yazılan spinör alanlı non-lineer dalga denklemi çözümlerinin (gene Dirac tarafından bulunan) elektron ve anti-elektron yorumlamasındaki başarısı, teorik fizikte yeni bir paradigmanın ortaya çıkmasına neden olmuştur. Bu paradigma teorik fizikçileri temel parçacıklar için yeni non-lineer alan denklemleri yazmaya ve bu denklemlerin fiziksel dalga çözümlerini aramaya teşvik etti. Yeni parçacıkların keşfedilmesi ile bu teorik çalışmalar ve arayışlar daha da cazibeli bir duruma geldi. Özellikle 1950'li yıllardan itibaren teorik fizik dünyasında söz konusu bu çabalarda büyük bir artma gözlendi. Tüm parçacıkları kapsayacağı ümit edilen geniş simetrilere sahip bir çok sayıda teorik modeller geliştirildi ve önerildi. Non-lineer alan denklemleri üzerine yapılan bu ısrarlı çalışmalar ve arayışlar en sonunda meyvesini verdi. Temel parçacıkları tek bir alan teorisi altında toplayabilmenin önünü açacak matematiksel yapının temelleri atıldı. 1954 yılında iki teorik fizikçi, Yang ve Mills çok önceleri matematikçiler tarafından üzerinde çalışmalar yapılmış Abelyen olmayan Lie gruplarının sınıflandırılmasını bu tip non-lineer alan modellerine uyguladılar. Geometrik olmayan iç simetrileri de kapsayan (global ayar) ve parçacıkları veren alanların dinamik yapılaşmasını da verebilecek local gauge (yerel ayar) simetrisine sahip teorik alan modeli, Langrange fonksiyonu formalizmini geliştirdiler.

O yıllardan bugüne alan teorilerinin üzerine yapılan ve yapılanmakta olan çalışmalar sürmektedir; doğadaki gravitasyon dışındaki etkileşimlerin ayar teorilerinin geliştirilmesi, bu teorilerde simetrinin kendinden kırılmasının anlaşılması, zayıf etkileşmelerdeki ara bozonların hızlandırıcılarda bulunması, ayar teorilerin dinamik özelliklerinin, ara parçacık alış verişi, bu alış verişte ortaya çıkan bozuklukların giderilerek, Feymann diyagramlarıyla ifade edilebilmesi, süper simetri kavramı ve birleşik alan teorileri gibi devrimci görüşler ve buluşlar bu son 30 yıl içine sığmıştır. Parçacık fiziğinin standart modeli diyebileceğimiz bu oluşumlar kümesi kozmolojide de önemli gelişmelerin önünü açmıştır. Standart
modelin arkası üzerine yapılan teorik çalışmalar, kütle çekimli süper sicim teorileri, yüksek boyutlu

modeller, süper simetrili modeller gibi, sürmektedir.

Parçacık fiziğindeki bu hızlı gelişmeler, modellerle ortaya çıkan non-lineer alan denklemlerin geniş simetrili fiziksel çözümlerinin yeni teknikler geliştirilerek bulunmasını (örneğin yerel ayar teorilerdeki perturbasyon tekniği) ve bu çözümlerin fiziksel özelliklerinin ve yerinin tartışılmasını hep yanında taşımıştır. Şimdi bu topolojik çözümleri kısaca gözden geçirelim ve bir sınıflandırmasını verelim.

Solitonlar: Lagrange tipi alan teorilerinin klasik hareket denklemlerinin sonlu-enerjili, kararlı dalga çözümlerine genelde soliton adı verilir. Solitonlar 19. yüzyılda uygulamalı matematikçiler tarafından non-lineer dalga denklemlerinin çözümlerinde bulunmuşlardır, daha sonra ki yıllarda katı hal fiziği ile plazma fiziğinin bazı problemlerini açıklamada kullanılmıştır. Solitonların parçacık fiziğinde anlamlı (relevant) çözümler olabileceğinin anlaşılması 1960 lı yıllara dayanır . Sonlu enerjili yerel dalga çözümlerini ifade eden solitonlar, gerek (dalga) yayılırken gerekse kendi aralarındaki etkileşmelerinden sonra yapılarını korurlar. Başka bir değişle şekillerini sürekli koruyarak, yaşamlarını sonsuza dek sürdürürler, kendi aralarında etkileştiklerinde bilgi alış verişinde (enerji alış verişi) bulunmazlar. Örneğin foton tipik bir soliton karakterindedir. Bu özelliklerinden dolayı kararlı parçacıklar soliton çözümleri ile ifade edilmeye çalışılmıştır. Öte yandan solitonların parçacıklar fiziğinin önemli bir çalışma alanı olmasını
sağlayan diğer bir özelliği de topolojik görünümleridir. Şimdi solitonları topolojik klasik çözümler adı altında sınıflandırarak kısaca özelliklerini gözden geçirelim. (Solitonlar hakkında daha geniş bilgi için; Rajaraman,R. (1982) Solitons and Instantos, North-Holland, Amsterdam; Rebbi, C. and Solliani, G. (1984) Solutons and Particles, World Scientific, Singapore; Actor, A. (1980) Clasical Solutions and the Energy –Momentum Tensor, Annals of Physics, Vol.131,269-282; Eilenberg, G . (1981) Solitons in Nuclear and Elemantry Particle Physics, World Scientific,Singapore .)

Topolojik Klasik Çözümler genel olarak, a) sabit, b) statik, yalnız uzaya bağlı ve c) hem uzaya hem de zamana bağlı (uzay ve zamanda açılan instanton ve meron çözümleri) çözümler olmak üzere üç kümeye ayrılırlar.

a) **Sabit çözümler**: Bu çözümler sıfırdan farklı olan ve potansiyeli minimum kılan, sıfır – enerjili kararlı çözümlerdir. Bunlar vakum çözümleri olup, solitonlar bu çözümler arasında hapis olduğundan sonlu enerjiye sahiptirler. Bu tezde inceleyeceğimiz soliton çözümleri bu özelliğe sahiptir. Perturbasyon tekniği ile bulunan soliton çözümü kendiliğinden sabit çözümler arasında hapis olmaktadır. Sabit çözümler Yang-Mills yerel ayar teorilerinde simetrinin kendiliğinden kırılmasında ve Higgs mekanizmasında önemli rol oynarlar.

b) **Statik çözümler**: Bu çözümler ise uzay boyutuna göre, tek boyutlu kink (tek yamaçlı) çözümleri , iki boyutlu vorteks çözümleri ve üç boyutlu mono–pole (tek kutup) çözümleri adı altında üçe ayrılırlar. Kink çözümleri Baryonlar olarak yorumlanır. Ayrıca bu çözümlerin Sine-Gordon denklemini VI.3 de ele alacağımız kütleli Thirring Modeline dönüştürebileceği gösterilmiştir. İki boyutlu vorteks çözümleri tek yamaçlı çözümlere boyut açısından genişleme yapılabilmesi uğraşları ötesine geçememiştir. Mono-pole çözümleri SU(2) ayar teorilerinde tekil uzaysal noktanın hapis olması ile t'Hooft bulmuştur. (t'Hooft,G. (1971) Nucl. Phys., B35 , 267) Bu çözümlerin kutup özelliği olması, Maxwell denklemlerini daha simetrik yazmak için Dirac tarafından ortaya atılan magnetik mono-pole parçacıklarına karşılık gelmesini sağlamıştır. Buradaki açmaz da magnetik mono-polelerin gözlenememiş olmasıdır. Başka bir deyişle büyük patlama sonrası mono-pole tipi parçacıklar yaşama ortamı bulamamışlardır.

c) **Topolojik çözümler**: Topolojik özellikleri olan, hem uzaya hem de zamana bağlı olan, uzay ve zamanın iç içe girdiği veya uzay ve zamanın birlikte sonsuza açıldığı klasik çözümlerdir. Bu çözümlere örnek olarak instanton ve meron tipi çözümler verilebilir. İnstanton ve meron çözümlerinin simetrik özelliklerini ve çeşitli alanlardaki yapılarını VI.3 de geniş olarak ele alacağız ve çeşitli alan modellerinde bu çözümlerin nasıl bulunacağını göstereceğiz. Konformal simetrinin kırılması ile bulunan instanton çözüm tekniğini VI.2 de kısaca anlatılacaktır. İnstantonlar sıfır enerjili çözümlerdir ve eylemleri sonludur. Kuvatum karakteri taşırlar, bu nedenle kuarkların vakum durumu olarak yorumlanmışlardır ve vakumlar arası geçişi verdiklerinden kuarkların birlikte dolaşmalarını (her zaman ikili yada üçlü bir yaşantının içine hapsedilmiş olmalarını) açıklamada önem kazanmışlardır. Meronlar ise uzay-zamanda singülerdirler. Bu singülerlikten uygun bir dönüşümle kurtulunur.

1950 li yılların, keşfedilen parçacık sayısındaki hızlı artışın da etkisiyle, teorik fizikte her temel bir taneciği bir denklemle ifade etme çalışmalarının yoğunluk kazandığı yıllar olduğunu söylemiştik. Parçacıkları bir denklemle ifade etmenin en önemli nedenlerinden biri de Dirac'ın spinli parçacıklar için yazdığı rölativistik (görelilik) kuvantum özelliği olan, yani göreliliğin ve kuvantum fiziğinin ilkelerini bir araya getiren ve "Dirac Denklemi" olarak bilinen denklemin, elektronun ve anti-elektron özelliklerine uygun sonuçlar vermesiydi. (Anti-elektronların (pozitron) Anderson tarafından kozmik ışınlarda 1932 yılında keşfedilmesi ve aynı anda bir elektron yaratmadan bir pozitron yaratmanın olanaksızlığının anlaşılması) Fakat Dirac Kuramı ile ortaya çıkan her parçacık-anti-parçacık çiftine bir denklem fikrinin, özellikle parçacıkların kuvantum sayılarında karışıklıklara yol vereceği de açıktı. Born ve Heisenberg bunun tek bir birleşik denklem yazmakla aşılabileceğini öne sürdüler. Bu fizikçilere göre, tüm parçacıkların inşasına olanak verecek bir alan modeli non-lineer yapıda ve fermiyon özelliği olan bir dalga denklemi olmalıydı. Tüm parçacıklar da bu denklemin çözümünü veren fermionsal parçacıklardan oluşmalıydı. Özellikle 1950 li yıllarda Heisenberg ve öğrencileri bu tip bir alan modeli yazmak için büyük çabalarda bulundular. Heisenberg ve öğrencileri Dirac denklemine benzeyen, kütle terimine ek olarak fermiyonların diğer parçacıkları oluşturabilmesi için; kendi aralarında bütünleşmeleri de ifade eden terimi de içeren modeller geliştirdiler. Heisenberg'in bu çalışmalarından ve çabalarından etkilenen bir çok teorik fizikçide benzer spinor alanlı modeller geliştirdi. Hızlandırıcıların gelişmesi ile bulunan yeni deney sonuçları ve arkasından Yang-Mills tarafından bulunan yerel ayar teorileri Heisenberg bu rüyasına son verdi. Fakat konformal simetrilere sahip spinor alanlı non-lineer modeller ve spinli parçacıklar olan kuarkların 1960 yılına doğru Gell-Mann ve Y.Neeman tarafından önerilmesi ve deneylerde keşfi ile tekrar önem kazandılar. 1970 li yılların sonuna doğru Yang-Mills teorilerinde instanton tipi çözümler bulundu. (Polyakof, A. M. , Schwartz, A. S. and Tyupkin, Yu. S. (1975) Phys. Lett. B59 , 85;) Bu çözümlerin uzay-zamana bağlı olmaları yanında, vakum özellikleri göstermeleri parçacık fizikçilerinin büyük bir ilgisini çekti. Bu ilgi çeşitli skaler alan modellerinde instanton çözümlerinin bulunması ile kendini gösterdi, örneğin Alfaro, Fubini ve Furlan Sigma Modelinde instanton çözümleri buldu (Alfaro, V.D. and Furlan, G. (1976) Nuovo Cimento,34a,555). Bu gelişmelere paralel olarak Akdeniz ve Smailagic spinör tipi insatanton çözümleri bulmak için, iki boyutlu saf fermiyonsal ve konformal simetriye sahip olan kütlesiz Thirring Modeli (Thirring , W.E. (1958) A Soluble Relativistic Field Theory , Annal physics, Vol.3,91-112) üzerinde bir laboratuar model olarak çalışmalar yaptılar ve bu modelde konformal simetrinin kırılması ile fermiyon tipi instaton ve meron tipi çözümleri buldular (Akdeniz, K. G and Smailagic , A . (1979) Clasical Solitons for Fermionic Models, II Nuova Cimento, Vol. 51A, No.3,345-357) Bu çözüm tekniğini Bölüm VI.3 de göstereceğiz. Spinör tip instanton ve meron çözümlerini dört boyuta taşımak için yeni bir konformal invaryant spinör model Akdeniz- Smailagic tarafından önerildi. Bu modelde konformal invaryantlığın sağlanması ve etkileşme terimi kuantizasyon için gerekli perturbasyon tekniklerine uygun olabilmesi için ancak üçüncü mertebeden türevlerle sağlanabildiğinden, model matematik bir model olmaktan öteye gidemedi.

Konformal invaryant alan modelleri üzerine yapılan bu çalışmalar üzerine, Akdeniz 1982 yılında yaptığı bir çalışma ile (Akdeniz, K .G. (1982) Classical Solutions of the Gürsey 's Conformal-Invariant Spinor Model, Lettere al Nuova Cimento, Vol . 33,40-44.) Gürsey tarafından 1955 yılında geliştirilmiş bir spinör alan dalga denklemini (Gürsey , F. (1956) On a Conform- Ivariant Spinor Vave Equation , IINuova Cimento , vol. 3, No.5, 988-1006) parçacık fizikçilerinin dikkatine sundu. Heisenberg'in rüyasını gerçekleştirmek için Gürsey tarafından önerilen bu denklem konformal simetriye haiz ilk non-lineer spinör dalga denklemidir. Bu özelliklerinden dolayı, Gürsey non-lineer spinor dalga denklemi (GSD), Dirac denklemine ve Heisenberg ve arkadaşlarının önerdiği denklemlere göre daha geniş dinamik bir simetriye sahiptir. Ayrıca fermiyonların dışındaki diğer spinli parçacık yapılaşmasına da açıktır. Akdeniz aynı çalışmada GSD de konformal simetrinin kırılması ile instanton ve meron tipi çözümlerini buldu ve bu çözümlerin Heisenberg' le bu konularda araştırmalar yapmış olan Kortel tarafından 1956 yılında (Kortel, F. (1956) On Some Solutions of Gürsey's Conformal – Invarian Spinor Vave Equation, II Nuova Cimento, vol .4, No.2, 210-215) GSD de bulunan çözüm sınıfının içinde mevcut olduğunu gösterdi. Bu çalışma sonrası GSD dört boyutlu ve birinci mertebeden türev içermesi nedeniyle de tekrar teorik fizik dünyasının gündemine geldi ve gerek denklem gerekse model olarak üzerinde bir çok çalışma yapıldı. GSD nin diğer fiziksel çözümlerinin bulunmasında, modelin kuvantum özelliklerinin anlaşılmasında ve yeni versiyonların yapılması çalışmalarında da bir çok Türk fizikçisinin de imzası vardır. Bu önemli çalışmaların çoğu Türkiye'de yapılmıştır ve bir çok tez çalışmasına konu olmuşlardır Ayrıca son yıllarda GSM' nin daha yüksek boyuttaki instanton ve meron çözümleri bulundu. Bu çalışmalar hakkında (Önem, C. "Başlıklı" Doktora Tezi, İstanbul Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 2001)

Gelecek bölümde alanlar teorisindeki Lagrange Fonksiyonu formalizmini ele alacağız. ve Euler Lagrange diferansiyel denklemlerinin çıkartılışı üzerinde duracağız. Bu denklemlerin simetrik ve değişmezlik özelliklerini ele alacağız. Değişmezlik özelliklerine bağlı olarak ortaya çıkan korunumları tartişacağız. Lagrange fonksiyonlarının yerel faz dönüşümlerine göre değişmezliğini, örneğin bu değişmezlik Elektromagnetik kuramında yük korunumunu verir ve "ayar alanı" adı verilen bir alanın varlığını ortaya koyar, bu yeni alan fotonların bütün özelliklerin taşır, inceleyeceğiz. Ortaya çıkan yerel ayar alanların ara parçacıkların özelliklerini verdiğini göreceğiz. Ayrıca dört-boyutlu konformal koordinat dönüşümünün özelliklerini kısaca ele alacağız. Konformal dönüşümün türev operatörlerinin Lie Grubu yapılaşmasını ve Lie cebiri özelliklerini vereceğiz. Konformal invaryant ve spinor alanları içeren bir modelde, konformal simetrinin nasıl kırılabileceğini göstereceğiz. Bölüm VI.3 de konformal simetrinin kendiliğinden kırılmasın ile instanton ve meron tipi spinor çözümlerin nasıl elde edileceğini gösterip çeşitli skaler ve spinör alanlı teorik modellerde instanton ve meron çözüm örneklerini vereceğiz.
Bölüm V!.4 de kütleli Thirring Modelinde ve Kütleli Gürsey Modelinde Soler ön-çözümü (Soler , M. (1970) Classical , Staible , Nonlinear Spinor Field with Positive rest Energy , Physical Rev. D. , 1 , 2766 – 2769) ile soliton yapılaşmalarını göstereceğiz. Bulanan soliton çözümlerinin dinamik yapısını tartışacağız.

PAULİ MATRİSLERİ (Temel parçacıklar)
1)Yarım-spinli parçacıklar
2)Hamiltonien ve Lagrangien

S=1/2 parçacıkların $L_i = \frac{1}{2} s_i$ i=1,2,3

s_i' lere Pauli matrisleri diyoruz.

$$s_1 = s_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad s_2 = s_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad s_3 = s_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ÖZELLİKLERİ:

1) $s_1^2 = s_2^2 = s_3^2 = I$

2) $s_1 s_2 = -s_1 s_2 = i s_3, \quad s_2 s_3 = -s_2 s_3 = i s_1, \quad s_3 s_1 = -s_1 s_3 = i s_2$

3) Komitatifliği; $[s_1, s_2] = 2i s_3$ Dairesel permütasyon.

$[s_2, s_3] = 2i s_1$ $\quad [s_3, s_1] = 2i s_2$

Genel: $[s_1, s_2] = 2ie_{ijk} \nabla_k$

4) $s_1^2 . s_2^2 . s_3^2 = iI$

5) $T_r [s_i] = 0$

6) $\det(s_i) = -1$

7) $\{s_{i,} s_j\} = 2id_{ij} = s_i s_j + s_j s_j$

8) $T_r [s_i s_j] = 2id_{ij}$