ANALİZ-I

2007-2008 Öğrenim Yılı

Uygulama Notları

Araş. Gör. Canan Ünlü
Araş. Gör. Fatma Aydoğmuş

Ders Notunu Tutan: Serhan Seyyare Aksu

— ANALİZ UYGULAMA I —

- Önermeler -

„ Tanım: Doğru yada yanlış olabilen yargı bildiren cümlelerdir.
Örn: "Güzel, çirkin, kötü" sıfatları yargı bildirmelerine rağmen cümle olmadıkları için önerme değildir.

"Bütün insanlar ölümlüdür" hem cümle hem de yargı bildirdiği için önermedir.

→ Bir önerme ya doğrudur ya da yanlıştır. önermeleri p, q, r, s .. gibi harflerle gösteririz.
→ Önermenin doğruluğu D ile yanlışlığı Y ile gösterilir.

— Önerme Çeşitleri —

1) Basit önerme: Bilinen anlamda önermeye dnr. p, q, r, s ile gösterilir.
2) Bileşik önerme: Basit önermelerin $\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ sembolleri kullanılarak oluşturulan önermelere dnr. $p \wedge q$, $p \Rightarrow (q \wedge r)$
3) Negatif önerme: (Bir önermenin değili) p önermesi doğru olduğunda yanlış, yanlış olduğunda ise doğru olan önermeye dnr. p'
4) İki önermenin kesişimi (birlikte evetlenme). p ve q gibi iki basit önermeyi $\wedge$ (ve) simgesiyle bağlayarak oluşturulan önermedir. $p \wedge q$ önermesinin doğruluk değeri; p, q önermelerinin ikisinde doğru olduğu durumlarda doğru, diğer durumlarda yanlış olan önermedir.

p	q	$p \wedge q$
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	Y
Y	Y	Y

5) İki önermenin birleşmesi (seçeneklilik). p ve q gibi iki basit önermeyi $\vee$ (veya) simgesiyle bağlayarak oluşturulan önermedir. $p \vee q$ önermesinin doğruluk değeri; her ikisininde yanlış olması durumunda yanlış diğer durumlarda doğrudur.

p	q	$p \vee q$
D	D	D
D	Y	D
Y	D	D
Y	Y	Y

6) Önermelerin gerektirmesi yada koşul: p ve q gibi iki basit önermenin ($\Rightarrow$) bağlacıyla bağlanarak oluşan önermedir. $p \Rightarrow q$ önermesinin doğruluk değeri, p önermesinin doğru, q önermesinin yanlış olduğu durumlarda yanlış, diğer durumlarda doğrudur.

p	q	$p \Rightarrow q$
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	D
Y	Y	D

7) İşdeğerlilik (gereklilik ve yeterlilik, karşılıklı koşul); p ve q gibi iki basit önermenin $\Leftrightarrow$ simgesiyle bağlanarak oluşan önermedir. $p \Leftrightarrow q$ önermesinin doğruluk değeri; herikisinde doğru veya herikisinde yanlış olması durumunda doğru, diğer durumlarda yanlıştır.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	Y
Y	Y	D

NOT:

1) p herhangi bir önerme olmak üzere $p \wedge p'$ daima yanlış, $p \vee p'$ daima doğrudur.
2) Daima doğru olan önermeye totoloji (uyuşma), daima yanlış olan önermeye (çelişki) kontradiksiyon denir.

p	p'	$p \wedge p'$	$p \vee p'$
D	Y	Y	D
D	Y	Y	D
Y	D	Y	D
Y	D	Y	D

— Özdeşlikler —

p, q, r herhangi üç önerme olsun;

1) $(p \wedge q)' \equiv p' \vee q'$
2) $(p \vee q)' \equiv p' \wedge q'$ } De Morgan Kuralı
3) $(p \Rightarrow q)' \equiv (p' \vee q)' \equiv p \wedge q'$
4) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (q' \Rightarrow p')$

ÖRN: $(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ ifadesinin doğru olduğunu tablo yaparak gösteriniz.

p	q	$p \Leftrightarrow q$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
D	D	D	D	D	D
D	Y	Y	Y	D	Y
Y	D	Y	D	Y	Y
Y	Y	D	D	D	D

Doğruluk değerleri aynı olduğundan bu iki bileşik önerme denktir.

ÖRN: $[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \equiv [(p \wedge r') \Rightarrow q']$ doğruluğunu ispatlayınız.

p	q	r	r'	q'	$q \Rightarrow r$	$p \wedge r'$	$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$	$(p \wedge r') \Rightarrow q'$
D	D	D	Y	Y	D	Y	D	D
D	D	Y	D	Y	Y	D	Y	Y
D	Y	D	Y	D	D	Y	D	D
D	Y	Y	D	D	D	D	D	D
Y	D	D	Y	Y	D	Y	D	D
Y	D	Y	D	Y	Y	Y	D	D
Y	Y	D	Y	D	D	Y	D	D
Y	Y	Y	D	D	D	Y	D	D

$\Rightarrow$ Doğruluk değerleri aynı olduğu için her iki bileşik önerme birbirine denktir.

— İSPAT YÖNTEMLERİ —

1) Direkt (doğrudan) ispatlama: p verilen bir önermenin bilinen tarafı, q ise istenen ya da bulmaya çalıştığımız taraf olsun p doğru ise q önermesi de doğrudur. $(p \Rightarrow q)$

Örn: "Bir tek sayının karesi de tektir."

$\rightarrow x$ tek ise x^2 'de tektir. $x = 2a+1$

$x^2 = (2a+1)^2 = 1+4a+4a^2 \Rightarrow$ 2 ile tam bölünemediğinden tektir

2) Dolaylı ispat:

a. Çelişki bulma yöntemi: Direkt ispat yapılırken bir güçlükle karşılaşıldığında p 'nin doğru olduğunu göstermek için p' yanlış ise. (çelişkiye varılırsa) p 'nin doğru olduğunu göstermiş oluruz.

NOT: İspatı henüz yapılmamış bir önermeyi ispatlayamadığımız zaman aksini ya da tersini ispatlamaya çalışırız. Bunun için iki yöntem vardır;

1) Çelişme: Verilen ifade doğru kabul edilir elimizdekilerle çelişkiye varırız. Böylece bu ifadenin yanlış olduğunu göstermiş oluruz.

ÖRN. "Her doğal sayının iki ile toplamı çiftir"

$x \in N$ için $x+2$ çiftir

x tek ise $x+2$ tek, x çift ise $x+2$ çift — çelişki — önermemiz doğru değildir. Çünkü çelişkiye vardık.

2) Aksine (örnek metodu): Bir ifadenin yanlış olduğunu göstermek için tersine bir örnek bulmak yeterlidir.

ÖRN: "Bir tek sayının karesi çiftir" $5^2 = 25$ ifade yanlıştır aksine bir örnek verdik

b. Olmayana ergi yöntemi: $p \Rightarrow q$ bileşik önermesinin ispatlanması isteniyorsa bunun yerine eş değeri olan $q' \Rightarrow p'$ önermesini ispatlarız.

p	q	p'	q'	$p \Rightarrow q$	$q' \Rightarrow p'$
D	D	Y	Y	D	D
D	Y	Y	D	Y	Y
Y	D	D	Y	D	D
Y	Y	D	D	D	D

3) Tüme Varım (Matematiksel indüksiyon metodu): Doğal sayılarla ilgili önermelerin doğruluğunu göstermeye yarayan ispatlama yöntemlerinden biridir. Bu metod aşağıdaki teoreme dayanır.

Teorem: $D \subset N$ olsun D kümesi;

1) $1 \in D$

2) $k \in D \Rightarrow (k+1) \in D$ şartlarını gerçekleştirirse $D = N$ olur.

Sonuç: $P(n)$: doğal sayılarla ilgili bir önerme ve D bu önermenin doğruluk değerlerinin kümesi; $D = \{n : n \in N, P(n) \text{ doğru}\}$ olsun. Eğer $1 \in D$, $k \in D \Rightarrow (k+1) \in D$ ise $D = N$ dir. Yani $P(n)$ önermesi $\forall n \in N$ için doğrudur.

ÖRN: $1+3+5+ \dots (2n-1) = n^2$ bu eşitlik $\forall n \in N$ için doğru mudur?
(Tüme varım yönt. ispatlayınız)

1) $n=1$ için $2n-1 = 2.1-1 = 1$
$n^2 = 1^2 = 1$ doğrudur.
2) $n=k$ için $1+3+5+\dots\ 2k-1 = k^2$ olsun
3) $n=k+1$ için $1+3+5+\dots\ 2(k+1)-1 = (k+1)^2$
$\Rightarrow (2k+1) = (k+1)^2$ old. gösterelim
eşitliğimizin her iki tarafına $2k+1$ ekleyelim
$1+3+5+\dots (2k-1)+(2k+1) = \underbrace{k^2+2k+1}_{(k+1)^2}$

ÖRN: $\forall n \in N$ için $3^n \geq n \cdot 2^n$ olduğunu gösteriniz.

1) $n=1$ için $3^1 \geq 1 \cdot 2^1 \Rightarrow 3 \geq 2$ doğrudur.
2) $n=k$ için $3^k \geq k \cdot 2^k \Rightarrow$ olduğunu kabul edelim
3) $n=k+1$ için $3^{k+1} \geq (k+1) \cdot 2^{k+1}$ olduğunu gösterelim

(2) eşitsizliğin her iki yanını 3 ile çarparsak; $3^k \cdot 3 \geq k \cdot 2^k \cdot 3 \Rightarrow 3^{k+1} \geq 3k\,2^k$ (a) elde edilir.
$3^{k+1} \geq 3k \cdot 2^k \geq (k+1) \cdot 2^{k+1}$ $\quad 3k \cdot 2^k \geq (k+1) \cdot 2^{k+1}$ olduğunu gösterirsek (3) ifadeyi doğrularız.

$3k \cdot 2^k - (k+1) \cdot 2^{k+1} = 2^k(3k-(k+1) \cdot 2) = 2^k(k-2) \geq 0$ $\quad (k \geq 2)$
$3k \cdot 2^k - (k+1) \cdot 2^{k+1} \geq 0$ $\quad 3k \cdot 2^k \geq (k+1) \cdot 2^{k+1}$ (b)
(a) ve (b) den ; $3^{k+1} \geq 3k \cdot 2^k \geq (k+1) \cdot 2^{k+1}$ ilk ve son terimlerden $3^{k+1} \geq (k+1) \cdot 2^{k+1}$ elde edilir. O halde verilen eşitsizlik $\forall n \in N$ için doğrudur.

ÖRN: $\forall n \in N$ için $3^{6n} - 2^{6n}$ sayısının 35 e tam bölündüğünü gösteriniz.

$3^{6n} - 2^{6n} = 35k \quad (k \in Z)$
1) $n=1$ için $3^6 - 2^6 = 35k \Rightarrow (3^3)^2 - (2^3)^2 = 35k \Rightarrow 19.35 = 35k$ doğrudur
2) $n=k$ için $3^{6k} - 2^{6k} = 35m$ olduğunu kabul edelim
3) $n=k+1$ için $3^{6k+6} - 2^{6k+6} = 35t$ olduğunu gösterelim

$\Rightarrow 3^{6k} \cdot 3^6 - 2^{6k} \cdot 2^6 = 729 \cdot 3^{6k} - 64 \cdot 2^{6k} = (64+665) \cdot 3^{6k} - 64 \cdot 2^{6k}$
$\Rightarrow 64 \cdot 3^{6k} + 665 \cdot 3^{6k} - 64 \cdot 2^{6k} = 64(3^{6k} - 2^{6k}) + 665 \cdot 3^{6k}$
$\Rightarrow 64 \cdot 35m + 665 \cdot 3^{6k} = 64 \cdot 35m + 35 \cdot 19 \cdot 3^{6k}$
$\Rightarrow 35(\underbrace{64m + 19 \cdot 3^{6k}}_{t}) = 35t$ $\quad$ (3) denkleminin verilen $\forall n \in N$ için doğru olduğunu ispatladık

ÖRN: $\forall n \in N$ için $x^{2n-1} + y^{2n-1}$ 'in $(x+y)$ ile tam olarak bölündüğünü gösteriniz?

1) $n=1$ için $x+y = (x+y)$ $\quad (x+y)$ ile tam bölünür $n=1$ için doğrudur
2) $n=k$ için $x^{2k-1} + y^{2k-1} = (x+y) \cdot t$ olduğunu kabul edelim $(t \in Z)$
3) $n=k+1$ için $x^{2k+1} + y^{2k+1} = (x+y) \cdot r$ $\quad (r \in Z)$ olduğunu gösterelim

$\Rightarrow x^{2k+1} + y^{2k+1} = x^{2k-1} \cdot x^2 + y^{2k-1} \cdot y^2$

$\Rightarrow$ (2) eşitsizlikten (y^{2k-1}) ifadesini çekip $\quad y^{2k-1} = (x+y) \cdot t - x^{2k-1}$
(3) eşitsizlikte yerine yazarız

$\Rightarrow x^{2k-1} \cdot x^2 + ((x+y) \cdot t - x^{2k-1}) \cdot y^2$

$\Rightarrow x^{2k-1}\cdot x^2 + (x+y)\cdot t\cdot y^2 - x^{2k-1}\cdot y^2$

$\Rightarrow x^{2k-1}\left[x^2 - y^2\right] + (x+y)\cdot t\cdot y^2 = x^{2k-1}\cdot\left[(x+y)(x-y)\right] + (x+y)\cdot t\cdot y^2$

$\Rightarrow (x+y)\left[\underbrace{x^{2k-1}\cdot(x-y) + t\cdot y^2}_{r}\right] = (x+y)\cdot r$

(3) eşitsizlikle verilen ifadeyi (2) eşitsizliğin yardımıyla da $\forall n\in\mathbb{Z}$ için doğruluğunu ispatladık.

— REEL SAYILAR —

ÖRN! $\sqrt{3}$ sayısının irrasyonel olduğunu ispatlayınız.

($\sqrt{3}$ sayısının rasyonel olduğunu kabul edelim)

$\rightarrow \sqrt{3} = \frac{p}{q}$ olsun $(p,q\in\mathbb{Z}\ \ q\neq 0)$ $\Rightarrow 3 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 3q^2 = p^2$ olduğundan

p^2, 3 ile bölünür. Dolayısıyla p'de 3 ile bölünür. Yani $p=3t$ bulunur. (a)

$p=3t$'yi ifadede yerine yazarsak $(3t)^2 = 3q^2 \Rightarrow \cancel{9}t^2 = \cancel{3}q^2$ $\quad 3t^2 = q^2$

$3t^2 = q^2$ olduğundan q^2 3 ile bölünür ve böylece q'de 3 ile bölünür. yani $q=3k$ bulunur. (b)

(a) ve (b)'den p ve q'ün ortak böleni olduğu anlaşılır. Bu ise $(p,q)=1$ olmasıyla çelişir. Kabulüm yanlış olduğu için bana soruda verilen ifade yani $\sqrt{3}$'ün irrasyonelliği doğrudur.

ÖRN! İki irrasyonel sayının toplamı ve çarpımı daima irrasyonel midir?

Aksine örnek metodu $\Rightarrow$ $\sqrt{9}+(-\sqrt{9})=0$ $\quad \sqrt{9}\,\sqrt{9}=9$ aksine örnek verdiğimiz için daima doğru değildir.

ÖRN! $2\sqrt{3}$ sayısının irrasyonel olduğunu ispatlayınız.

$2\sqrt{3} = \frac{p}{q}$ olsun $(p,q\in\mathbb{Z}\ \ q\neq 0)$ $\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{p}{2q} \Rightarrow 3 = \frac{p^2}{4q^2}$

$\Rightarrow 12q^2 = p^2$ olduğu için p^2 12 ile tam bölünür ve p'de 12 ile tam bölünür. $p=12k$ olur. Denklemde p gördüğümüz yere $12k$ yazarsak;

$12q^2 = (12k)^2 \Rightarrow \cancel{12}q^2 = \cancel{144}k^2 \rightarrow q^2 = 12k^2$ ifadesi bulunur. q^2 12 ile tam bölünür dolayısıyla q'de 12 ile tam bölünür. Bu ise $(p,q)=1$ olmasıyla çelişir. Yani p ve q aralarında asal değildir. 12 ortak bölenleridir. Dolayısıyla $2\sqrt{3}$ irrasyonel bir sayıdır. Çünkü rasyonel olduğunu ispatlayamadık.

ÖRN! $\frac{\sqrt{9}+2}{3}$ sayısının irrasyonel olduğunu ispatlayınız.

$\frac{\sqrt{9}+2}{3} = a$ $(a\in\mathbb{Q})$ olsun $\qquad \frac{9+4\sqrt{9}+4}{9} = a^2$

$\sqrt{9} = \frac{9a^2-9}{4}$ $\quad a\in\mathbb{Q}$ olduğu için ve $\sqrt{9}$ sayısı irrasyonel bir sayı olduğu için çelişkiye varılır.

$\sqrt{5}$ sayısının irrasyonel olduğunu gösterelim;

$\sqrt{5} = \frac{p}{q}$ olsun $(p, q \in \mathbb{Z} \quad q \neq 0)$. $5 = \frac{p^2}{q^2}$ $\quad 5q^2 = p^2$ elde edilir.

$p^2 = 5q^2$ ifadesinden p^2'nin 5 ile bölünebildiğini ve dolayısıyla p'ninde 5 ile bölünebileceği anlaşılır. $p = 5k$ ifadesi elde edilir. $p = 5k$ ifadesi denklemde yazılırsa;

$5q^2 = (5k)^2 \Rightarrow \cancel{5}q^2 = \cancel{25}k^2 \Rightarrow q^2 = 5k^2$ ifadesi elde edilir. Denklemde q^2'nin 5 ile bölünebildiği ve dolayısıyla q'ünde 5 ile bölündüğü görülür. Yani p ve q'ün asal olmadığı anlaşılır. Sonuçta $\sqrt{5}$'in irrasyonel olduğunu ispatlamış oluruz.

ÖRN: $0 < p < 1$ için $(1-p)^n \geqslant 1 - np$ $\forall n \in N$ için bu eşitsizliğin doğruluğunu gösteriniz.

1) $n = 1$ için $\quad (1-p)^1 \geqslant 1 - 1.p \Rightarrow 1 - p \geqslant 1 - p$ doğrudur.

2) $n = k$ için $\quad (1-p)^k \geqslant 1 - kp$ olduğunu kabul edelim.

3) $n = k+1$ için $\quad (1-p)^{k+1} \geqslant 1 - (k+1)p$ olduğunu gösterelim.

(2) eşitsizliğinin her iki tarafını $(1-p)$ ile çarparsak

$(1-p)^k . (1-p) \geqslant (1-kp)(1-p) \Rightarrow (1-p)^{k+1} \geqslant (1-kp)(1-p)$ ifadesi bulunur.

$(1-p)^{k+1} \geqslant 1 - p - kp + kp^2 \Rightarrow (1-p)^{k+1} \geqslant 1 - p(k+1)$ $\quad kp^2$ sayısı pozitif doğal sayı olduğundan $1 - p - kp + kp^2 \geqslant 1 - p - kp$ ifadesi elde edilir.

$n = k+1$ için doğruluğunu gösterdik. $\forall n \in N$ için eşitsizlik doğrudur.

— İKİLİ İŞLEM —

$A \times A$'dan A'ya bir fonksiyona A'da bir ikili işlem denir. $\star$ A'da bir ikili işlem ve $a, b \in A$ olsun (a, b) nin $\star$ işlem altındaki görüntüsü $a \star b$ ile gösterelim. $\star : A \times A \to A$ (A'dan A'ya tanımlı bir ikili işlem fonksiyonu)

- Fonksiyon olma özelliklerinden;

i) $\forall a, b \in A$ için A'da bir tek $a \star b$ vardır

ii) Bu elemanın tek görüntüsü vardır.

Bu özelliklerden I. sine işlemin kapalılığı II. sine iyi tanımlılığı denir. Üzerinde en az bir ikili işlem tanımlı boş olmayan kümeye cebirsel yapı denir. A kümesi üzerinde bir $\star$ ikili işlemi tanımlı ise bu ikili işlem $(A, \star)$ şeklinde gösterilir.

Örn: N kümesi üzerinde $\quad (a, b) \to a + b$

$(a, b) \to a . b$ ile tanımlı $+$, $.$ fonksiyonları birer ikili işlemdir.

— GRUP —

G boş olmayan bir küme ★ G'de bir ikili işlem olsun. $(G,\star)$ cebirsel yapısı aşağıdaki aksiyonları sağlıyorsa bir grup dır.

G1: ★ G'de bir ikili işlemdir (Kapalılık ve iyi tanımlılık)
G2: ★ işleminin G'de birleşme özelliği vardır ($\forall a,b,c \in G$ için $a\star(b\star c) = (a\star b)\star c$ dır)
G3: ★ işleminin G'de birim elemanı vardır. $\forall a \in G$ için $a\star e = e\star a = a$ olacak şekilde $\exists e \in G$ vardır.
G4: ★ işlemine göre G'deki her elemanın tersi vardır $\forall a \in G$ için $a\star a^{-1} = a^{-1}\star a = e$ olacak şekilde $\exists\, a^{-1} \in G$ vardır.

– Birim elemanın ve ters elemanın varlığı tek türlüdür.

Tanım: $(G,\star)$ bir grup ve $\forall a,b \in G$ için $a\star b = b\star a$ oluyorsa (değişme özelliği sağlanıyorsa) bu gruba değişmeli grup veya abel grubu dır.

Tanım: G sonlu bir küme ise $(G,\star)$ grubuna sonlu grup dır ve eleman sayısına da grubun mertebesi dır.

NOT: Değişmeli gruplarda işlem (+) ise toplamsal grup, • ise çarpımsal grup dır. Çarpımsal grup değişmeli olmayabilir.

Örn: $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi adi toplama işlemine göre bir toplamsal gruptur.

Örn: $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi ve $\mathbb{R}$ reelsayılar kümesi adi toplama işlemine göre birer toplamsal grupturlar.

Örn: $G = \{1, -1, -i, i\}$ kümesi çarpımsal işlemine göre mertebesi 4 olan bir değişmeli gruptur.

ÖRN: $G = \{e, a, b, c\}$ kümesi ve aşağıdaki tablo ile tanımlı ★ işlemi veriliyor $(G,\star)$'un bir grup olduğunu gösterelim.

★	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

G1: tabloda sadece G'nin elemanları bulunduğu ve her satır, sütundaki elemanlardan bir ve yalnız bir tane bulunduğu için ★ G üzerinde bir ikili işlemdir.

G2: Birleşme özelliğini göstermek için G'nin elemanlarından farklı olmaları gerekmeyen mümkün bütün üç elemanları için birleşme kurallarının sağlandığını göstermek gerekir. Tabloda görüldüğü gibi "e" birim eleman olduğu için sadece a, b, c elemanları için göstermek gerekli ve yeterlidir.

$$a\star(b\star c) = (a\star b)\star c \qquad a\star(c\star b) = (a\star c)\star b$$
$$a\star a = c\star c \qquad a\star a = b\star b$$
$$e = e \qquad e = e$$

$b * (a * c) = (b * a) * c$ $\quad$ $b * (c * a) = (b * c) * a$

$b * b = c * c$ $\quad$ $b * b = a * a$

$e = e$ $\quad$ $e = e$

$c * (a * b) = (c * a) * b$ $\quad$ $c * (b * a) = (c * b) * a$

$c * c = b * b$ $\quad$ $c * c = a * a$

$e = e$ $\quad$ $e = e$

G3: $a * e = e * a = a$
$b * e = e * b = b$
$c * e = e * c = c$ olduğundan $e \in G$ dir.

G4: $a * a^{-1} = a^{-1} * a = a$
$b * b^{-1} = b^{-1} * b = b$
$c * c^{-1} = c^{-1} * c = c$ $\quad$ A aksiyomlarını sağladığı için bir gruptur.

~ DİZİLER ~

ÖRN: $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1} - n) = ?$ $\quad$ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(\sqrt{n^2+1} - n)}{\dfrac{1}{(\sqrt{n^2+1} + n)}}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^2+1} - n)(\sqrt{n^2+1} + n)}{\sqrt{n^2+1} + n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1} + n} = \frac{1}{\infty} = 0$$

ÖRN: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \dots (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{3^{n-1}}\right) = ?$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{4}\left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right) = \frac{3}{4} \cdot (1 - 0) = 3/4$$

$$\left(1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}\right)$$

$|a| < 1 \Rightarrow a^n = 0$
$\left|-\frac{1}{3}\right| < 1$ olduğu için $\left(-\frac{1}{3}\right)^n = 0$

Sıkıştırma Teoremi:

$\forall n \in N$ için $x_n \leq y_n \leq z_n$ olsun. Eğer $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = l$ ise

bu durumda $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = l$ olur.

ÖRN: $\lim_{n\to\infty} \frac{\cos^2 n}{n} = 0$ olduğunu gösteriniz.

$-1 \leq \cos n \leq 1$ olduğunu biliyoruz buradan $0 \leq \cos^2 n \leq 1$ yazılır. Her üç tarafı n'e bölersek,

$$\frac{0}{n} \leq \frac{\cos^2 n}{n} \leq \frac{1}{n}$$ bulunur

$\forall n \in N$ için yukarıdaki ifade doğrudur

$\lim_{n\to\infty} 0 = 0$ $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ bu durumda $\lim_{n\to\infty} \frac{\cos^2 n}{n} = 0$ olur.

Çünkü baştaki ve sondaki terimlerin limitleri 0 olduğu için sıkıştırma teoremi yardımıyla ortadaki terimin limiti de sıfırdır.

ÖRN: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n} = 3$ olduğunu gösteriniz

$$3^n \leq 3^n + 2^n \leq 3^n + 3^n = 2.3^n$$

$$\sqrt[n]{3^n} \leq \sqrt[n]{3^n + 2^n} \leq \sqrt[n]{2.3^n} \implies 3 \leq \sqrt[n]{3^n + 2^n} \leq 3.\sqrt[n]{2}$$ ifadesi bulunur

$\forall n \in N$ için eşitlik ifadesi doğrudur.

$$\lim_{n\to\infty} 3 = 3 \qquad \lim_{n\to\infty} 3.\sqrt[n]{2} = \lim_{n\to\infty} 3.\ 2^{\frac{1}{n}} = 3.\ 2^{\frac{1}{\infty}} = 3.2^0 = 3$$

Sıkıştırma teoremi gereği $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n} = 3$ olur.

ÖRN: $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{2}.\sqrt[4]{2} \ldots \ldots \sqrt[2^n]{2} \right) = ?$

$$\lim_{n\to\infty} \left(2^{\frac{1}{2}}.\ 2^{\frac{1}{4}} \ldots\ldots 2^{\frac{1}{2^n}} \right) = \lim_{n\to\infty} 2^{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right)}$$

$$\lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots \frac{1}{2^{n-1}}\right)} = \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{2}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\right)}$$

$$\lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)} = \lim_{n\to\infty} 2^{\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)} = 2$$

$|a| < 1 \implies a^n = 0$

$\left|\frac{1}{2}\right| < 1$ olduğu için $\frac{1}{2^n} = 0$

ÖRN! Genel terimi $x_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$ olan bir dizinin limiti=?

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n\cdot\frac{n}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{1/n} =$$

$$= e^{\frac{1}{\infty}} = e^0 = 1$$

ÖRN: $x_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2+1}$ limitini bulunuz

$$\ln x_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2+1} \Rightarrow \ln x_n = (n^2+1)\cdot\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

$$\ln x_n = (n^2+1)\cdot\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right) \Rightarrow \ln x_n = \frac{n^2+1}{(n+1)}\cdot(n+1)\cdot\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$\ln x_n = \frac{n^2+1}{n+1}\cdot\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}(\ln x_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n+1}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right)$$

$$\ln\left(\lim_{n\to\infty}x_n\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n+1}\right)\cdot\ln\left[\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right]$$

$$\ln\left(\lim_{n\to\infty}x_n\right) = \infty\cdot\ln e^{-1} \Rightarrow \ln\left(\lim_{n\to\infty}x_n\right) = -\infty$$

$$\lim_{n\to\infty}x_n = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2+1} = 0 \text{ dır.}$$

ÖRN: $a_n = \left(\frac{3}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$ dizisinin limiti?

$$\ln a_n = \ln\left(\frac{3}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \Rightarrow \ln a_n = \frac{1}{n}\cdot\ln\left(\frac{3}{n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}(\ln a_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\ln\left(\frac{3}{n}\right)\right) \Rightarrow \ln\left(\lim_{n\to\infty}a_n\right) = \ln\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\right)$$

$\ln(\lim_{n\to\infty} a_n) = 0.0 = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = e^0 = 1$

$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = 1$ olur.

ÖRN: $b_n = \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$ dizisinin limitini bulunuz.

$b_n = \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n^n}{(n+1)^n \cdot (n+1)} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1}$

$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}\right)$

$= \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n \cdot \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-1} \cdot \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}\right)$

$= \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-1} \cdot \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}\right)$

$= e^{-1} \cdot 1 \cdot 0 = 0$

$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = 0$ dır.

~SERİLER~

ÖRN: a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ b. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ c. $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ serilerinin karakterlerini belirleyiniz. Yakınsaksa toplamını bulunuz.

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \qquad a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ ise

$a_1 \Rightarrow \frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}}$

$a_2 \Rightarrow \cancel{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}$

$\vdots$

$a_n \Rightarrow \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}$

$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$

$\lim_{n\to\infty}(S_n) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ serisi yakınsaktır.

b. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \qquad a_n = (-1)^n$

$\qquad\qquad\qquad a_1 \qquad a_1+a_2 \qquad a_1+a_2+a_3$

$S_n = -1 \ , \ 0, \ -1 \ , \ 0 \ \ldots$ S_n'in limiti yoktur.

çünkü $S_n \to 0$

$S_n \to -1$ iki durum söz konusu olduğundan bu seri ıraksaktır

c. $\sum_{n=1}^{\infty} 1 \qquad a_n = 1$

$S_n = 1+1+1 \ldots \qquad S_n = n \cdot 1 = n$

$\lim_{n\to\infty} n = \infty$ olduğu için $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ serisi ıraksaktır.

ÖRN: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ serisinin karakterini inceleyiniz

$a_n = \frac{n}{3^n} \qquad a_{n+1} = \frac{n+1}{3^{n+1}} \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} = ? \quad \frac{n+1}{3^n \cdot 3} \cdot \frac{3^n}{n} = \frac{n+1}{3n}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3n} = \frac{1}{3} < 1$ olduğu için $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ serisi oran testine göre yakınsaktır.

ÖRN: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ serisinin karakterini inceleyiniz

$a_n = \frac{1}{n!} \qquad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} = ? \quad \frac{1}{(n+1) \cdot n!} \cdot \frac{n!}{1} = \frac{1}{n+1}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{\infty+1} = \frac{1}{\infty} = 0 < 1$ olduğu için

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ serisi yakınsaktır.

ÖRN: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n^4+1}}$ serisinin karakterini inceleyiniz.

$n^4 \geq 1 \Rightarrow n^4 + n^4 \geq 1 + n^4$

$2 \cdot n^4 \geq 1 + n^4$

$\frac{1}{1+n^4} \geq \frac{1}{2 \cdot n^4} \Rightarrow \frac{n^2}{\sqrt{1+n^4}} \geq \frac{n^2}{\sqrt{2 \cdot n^4}}$

$$\frac{n^2}{\sqrt{n^4+1}} \geq \frac{n^2}{\sqrt{2 \cdot n^4 \cdot n}} = \frac{\cancel{n^2}}{\cancel{n^2} \cdot \sqrt{2n}} = \frac{1}{\sqrt{2n}}$$

$$\left(\begin{array}{ll} \multicolumn{2}{c}{— \; P \text{ serisi testi} \; —} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} & \begin{array}{l} p > 1 \text{ yakınsak} \\ p \leq 1 \text{ ıraksak} \end{array} \end{array} \right)$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n}}$ serisi ıraksaktır.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n^4+1}}$ serisi de ıraksaktır.

ÖRN: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2 \cdot 2^n}$ serisinin karakterini inceleyiniz.

$a_n = \frac{2n+1}{n^2 \cdot 2^n}$ $\quad b_n = \frac{1}{2^n}$ olsun

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{2n+1}{n^2 \cdot 2^n} \cdot \frac{2^n}{1} = \lim_{n \to \infty} \frac{2n+1}{n^2} = 0$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ yakınsak olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2 \cdot 2^n}$ seriside yakınsaktır.

ÖRN: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n$ serisini inceleyiniz.

$$a_n = \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n \qquad \sqrt[n]{a_n} = \left[\left(\frac{n}{2n+1} \right)^n \right]^{\frac{1}{n}} = \frac{n}{2n+1}$$

$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1$ olduğu için

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n$ serisi yakınsaktır.

ÖRN: $\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ serisinin karakterini inceleyiniz.

$a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \Rightarrow S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{A}{\underset{(2n+1)}{(2n-1)}} + \frac{B}{\underset{(2n-1)}{(2n+1)}} \Rightarrow \frac{A(2n+1) + B(2n-1)}{(2n-1)(2n+1)}$$

$1 = A(2n+1) + B(2n-1) \Rightarrow 1 = A2n + A + B2n - B$

$A - B = 1 \qquad A+B=0 \qquad A = \frac{1}{2} \qquad B = -\frac{1}{2}$

$$a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{2(2n+1)} \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ ise

$a_1 \Rightarrow \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right)$

$a_2 \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right)$

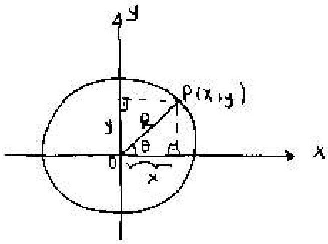
$\vdots$

$a_n \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$

$S_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}$ olduğu için

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ serisi yakınsaktır çünkü kısmi toplamlar dizisi yakınsaktır.

— TÜREV —



$x = R \cdot \cos\theta$
$y = R \cdot \sin\theta$

$\theta = \omega t \qquad \omega = 2\pi f$

$\vec{OP} = \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = R.\cos\omega t\,\vec{i} + R.\sin\omega t\,\vec{j}$

$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -R\omega.\sin\omega t\,\vec{i} + R.\omega.\cos\omega t\,\vec{j}$

$|\vec{v}| = v = \sqrt{R^2.\omega^2.\sin^2\omega t + R^2.\omega^2.\cos^2\omega t} = R\omega$

$|\vec{r}| = \sqrt{R^2.\cos^2\omega t + R^2.\sin^2\omega t} = R$

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -R\omega^2.\cos\omega t\,\vec{i} - R\omega^2.\sin\omega t\,\vec{j}$

$= -\omega^2(R.\cos\omega t\,\vec{i} + R.\sin\omega t\,\vec{j}) = -\omega^2.\vec{r}$

$\vec{a} = \omega^2.\vec{r} \qquad \vec{a} \,//\, \vec{r}$ olur fakat ters yönlüdür.

$$a = |\vec{a}| = |-\omega^2 \cdot \vec{r}| = |-\omega^2| \cdot |\vec{r}| = \omega^2 \cdot r$$

$$\vec{r} \cdot \vec{v} = -R^2 \cdot \omega \cdot \cos\omega t \cdot \sin\omega t + R^2 \cdot \omega \cdot \sin\omega t \cdot \cos\omega t = 0$$

$\therefore \quad \vec{r} \perp \vec{v}$ olur.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{R\omega \cdot \cos\omega t}{-R\omega \cdot \sin\omega t} = -\cot\omega t$$

ÖRN: $x = \sqrt[4]{\dfrac{1+\sin\omega t}{t^2+1}}$ ve $t = \dfrac{\pi}{2\omega}$ için $dx/dt = ?$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1+\sin\omega t}{t^2+1}\right)^{-\frac{3}{4}} \cdot \left(\frac{\omega \cdot \cos\omega t \cdot (t^2+1) - (1+\sin\omega t) \cdot 2t}{(t^2+1)^2}\right)$$

$$= \frac{-4t}{(t^2+1)^2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{2}{\pi^2/4\omega^2 + 1}\right)^{-\frac{3}{4}}$$

ÖRN: $A = x^2 \dfrac{d}{dx}$ $\quad B = \dfrac{d^2}{dx^2}$ $\quad [A, B] = ?$

$$[A, B] = AB - BA = \left[x^2 \frac{d}{dx}, \frac{d^2}{dx^2}\right]$$

$$\left[x^2 \frac{d}{dx}, \frac{d^2}{dx^2}\right] f = x^2 \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right) - \frac{d^2}{dx^2}\left(x^2 \frac{df}{dx}\right)$$

$$= x^2 \frac{d^3 f}{dx^3} - \frac{d}{dx}\left(2x \frac{df}{dx} + x^2 \cdot \frac{d^2 f}{dx^2}\right)$$

$$= \cancel{x^2 \frac{d^3 f}{dx^3}} - \left(2 \frac{df}{dx} + 2x \cdot \frac{d^2 f}{dx^2} + 2x \cdot \frac{d^2 f}{dx^2} + \cancel{x^2 \cdot \frac{d^3 f}{dx^3}}\right)$$

$$= -2 \frac{df}{dx} - 4x \frac{d^2 f}{dx^2}$$

$$[A, B] f = -2 \frac{df}{dx} - 4x \frac{d^2 f}{dx^2}$$

$$[A, B] = -2 \frac{d}{dx} - 4xB$$

ÖRN: $A = x$

$B = \dfrac{d}{dx}$

$C = x \dfrac{d}{dx}$ $\quad [A, (B+2C)] = ?$

$[A,(B+2C)] = [A,B] + [A,2C] = [A,B] + 2[A,C] = ?$

$[A,B] = ? \Rightarrow \left[x, \frac{d}{dx}\right] = ?$

$\left[x, \frac{d}{dx}\right]f = x\frac{df}{dx} - \frac{d}{dx}(xf) = \cancel{x\frac{df}{dx}} - \left(f + \cancel{x\frac{df}{dx}}\right) = -f$

$[A,B]f = -f \Rightarrow [A,B] = -1$

$[A,C] = ? \Rightarrow \left[x, x\frac{d}{dx}\right] = ?$

$\left[x, x\frac{d}{dx}\right]f = x\cdot\left(x\frac{df}{dx}\right) - x\frac{d}{dx}(xf)$

$= x^2\frac{df}{dx} - x\left(f - x\frac{df}{dx}\right) = \cancel{x^2\frac{df}{dx}} - xf - \cancel{x^2\frac{df}{dx}} = -xf$

$[A,C]f = -xf \qquad [A,C] = -x = -A$

$[A,(B+2C)] = -1 - 2A$

ÖDEV: $[A^2,(B+C^2)] = ? \Rightarrow [A^2,B] + [A^2 + C^2] = ?$

$A^2 = A.Af = x.xf = x^2 f \qquad A^2 = x^2$

$[A^2,B] = \left[x^2, \frac{d}{dx}\right] = ? \quad \left[x^2, \frac{d}{dx}\right]f = x^2\frac{df}{dx} - \frac{d}{dx}(x^2 f)$

$= \cancel{x^2\frac{df}{dx}} - \left(2xf + \cancel{x^2\frac{df}{dx}}\right) = -2xf$

$[A^2,B]f = -2xf \Rightarrow [A^2,B] = -2A$

$C^2 = C.Cf = x\frac{d}{dx}\left(x\frac{df}{dx}\right) = x\left(\frac{df}{dx} + x\cdot\frac{d^2f}{dx^2}\right) = x\frac{df}{dx} + x^2\frac{d^2f}{dx^2}$

$C^2 = x\frac{d}{dx} + x^2\frac{d^2}{dx^2}$

$[A^2 + C^2] = ? \Rightarrow [A^2 + C^2]f = x^2\left(x\frac{df}{dx} + x^2\frac{d^2f}{dx^2}\right) - \left(x\frac{d}{dx} + x^2\frac{d^2}{dx^2}\right).x^2 f$

$= \cancel{x^3\frac{df}{dx}} + \cancel{x^4\frac{d^2f}{dx^2}} - \cancel{x^3\frac{df}{dx}} - \cancel{x^4\frac{d^2f}{dx^2}} = 0$

$[A^2, C^2] = 0$

$[A^2,(B+C^2)] = -2A$

ÖRN: $x^4 + y^4 = \sin^2(x+y)$. $\frac{dy}{dx} = ?$

$$4x^3 + 4 \cdot y' \cdot y^3 = 2\sin(x+y) \cdot (1+y') \cdot \cos(x+y)$$

$$4x^3 + 4y' \cdot y^3 = \sin 2(x+y) \cdot (1+y') \Rightarrow 4x^3 + 4y' \cdot y^3 = \sin 2(x+y) + y' \cdot \sin 2(x+y)$$

$$4y' \cdot y^3 - y' \sin 2(x+y) = \sin 2(x+y) - 4x^3$$

$$y'(4y^3 - \sin 2(x+y)) = \sin 2(x+y) - 4x^3$$

$$y' = \frac{\sin 2(x+y) - 4x^3}{4y^3 - \sin 2(x+y)}$$

ÖRN: $xy^3 + x^3 y = \sin\sqrt{x^2+y^2}$ $\quad dy/dx = ?$

$$y^3 + x \cdot 3y' \cdot y^2 + 3x^2 y + x^3 y' = \frac{1}{2} \cdot (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x + 2y' \cdot y) \cdot \cos\sqrt{x^2+y^2}$$

$$y^3 + 3y' \cdot y^2 x + 3x^2 y + x^3 y' = \frac{x + y \cdot y'}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \cos\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\sqrt{x^2+y^2}\,(y^3 + 3y' \cdot y^2 x + 3x^2 y + x^3 y') = \cos\sqrt{x^2+y^2} \cdot x + y \cdot y' \cdot \cos\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\sqrt{x^2+y^2}\,(3y' \cdot y^2 \cdot x + x^3 \cdot y') - y \cdot y' \cdot \cos\sqrt{x^2+y^2} = \cos\sqrt{x^2+y^2} \cdot x - \left[\sqrt{x^2+y^2}\,(y^3 + 3x^2 y)\right]$$

$$y'\left[\left[\sqrt{x^2+y^2}\,(3y^2 x + x^3)\right] - y \cdot \cos\sqrt{x^2+y^2}\right] = \cos\sqrt{x^2+y^2} \cdot x - \left[\sqrt{x^2+y^2}\,(y^3 + 3x^2 y)\right]$$

$$y' = \frac{\cos\sqrt{x^2+y^2} \cdot x - \left[\sqrt{x^2+y^2}\,(y^3 + 3x^2 y)\right]}{\left[\sqrt{x^2+y^2}\,(3y^2 x + x^3)\right] - y \cdot \cos\sqrt{x^2+y^2}}$$

ÖRN: $f(t) = \frac{(t-1) \cdot (t^2 - 2t)}{t^4} \rightarrow f'(t) = ?$

$$f(t) = \frac{(t-1) \cdot t(t-2)}{t^4} = \frac{(t-1)(t-2)}{t^3} = \frac{t^2 - 3t + 2}{t^3}$$

$$f'(t) = \frac{(2t-3) \cdot t^3 - (t^2 - 3t + 2)\, 3t^2}{t^6}$$

$$= \frac{2t^4 - 3t^3 - 3t^4 + 9t^3 - 6t^2}{t^6} = \frac{-t^4 + 6t^3 - 6t^2}{t^6}$$

$$= -\frac{1}{t^2} + 6 \cdot \frac{1}{t^3} - 6 \cdot \frac{1}{t^4}$$

ÖRN: $f(t) = \sqrt[3]{\dfrac{t^2 \cdot \sin t}{t + \cos^2(3t) + 1}} \Rightarrow f'(t) = ?$

$$f'(t) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{t^2 \cdot \sin t}{t + \cos^2(3t) + 1} \right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{(2t \cdot \sin t + t^2 \cdot \cos t) \cdot (t + \cos^2(3t) + 1) - (t^2 + \sin t)(1 - 2\cos 3t \cdot 3 \cdot \sin 3t)}{(t + \cos^2(3t) + 1)^2} \right)$$

$$f'(t) = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{\left(\dfrac{t^2 \cdot \sin t}{t + \cos^2 3t + 1} \right)^2}} \cdot \left(\frac{(2t \cdot \sin t + t^2 \cos t)(t + \cos^2 3t + 1) - (t^2 + \sin t) \cdot (1 - 3 \cdot \sin 6t)}{(t + \cos^2 3t + 1)^2} \right)$$

ÖRN: $y = \dfrac{x-1}{ax^2+1}$ eğrisinin $x=1$ noktasında teğetinin eğiminin $\frac{1}{4}$ olması için $a = ?$

$$y' = \frac{(ax^2+1) - (x-1)2ax}{(ax^2+1)^2} = \frac{ax^2 + 1 - 2ax^2 + 2ax}{(ax^2+1)^2} = \frac{-ax^2 + 2ax + 1}{(ax^2+1)^2}$$

$x = 1$ için $\dfrac{-a + 2a + 1}{(a+1)^2} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \dfrac{a+1}{(a+1)^2} = \dfrac{1}{4}$

$$\Rightarrow \frac{1}{(a+1)} = \frac{1}{4} \Rightarrow a = 3 \text{ //}$$

ÖRN: $y = \dfrac{ax^2 - 2}{x^2+1}$ eğrisinin $x=1$ noktasında teğetinin $x - 2y + 6 = 0$ doğrusuna paralel ise $a = ?$

$$y' = \frac{2ax(x^2+1) - (ax^2-2) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2ax^3 + 2ax - 2ax^3 + 4x}{(x^2+1)^2}$$

$y' = \dfrac{2ax + 4x}{(x^2+1)^2} \Rightarrow x = 1$ için $y' = \dfrac{2a+4}{4} = \dfrac{a}{2} - 1$

$x - 2y + 6 = 0 \qquad y = \dfrac{x+6}{2} = \dfrac{x}{2} + 3$

$m = \frac{1}{2}$

$$y' = \frac{a}{2} - 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow a = -1 \text{ //}$$

ÖRN: $x = \sin^5 t \quad y = \cos^3 t$ parametrik denklemi için $t = \frac{\pi}{3}$ de $\frac{dy}{dx} = ?$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

$$\frac{dy}{dx} = -3\cos^2 t \cdot \sin t \qquad \frac{dx}{dt} = 5 \cdot \sin^4 t \cdot \cos t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3 \cdot \cos^2 t \cdot \sin t}{5 \cdot \sin^4 t \cdot \cos t} = -\frac{3}{5} \cdot \frac{\cos t}{\sin^3 t} = -\frac{3}{5} \cdot \frac{\cos \pi/3}{\sin^3 \pi/3}$$

$$= -\frac{3}{5} \cdot \frac{1/2}{3\sqrt{3}/8} = -\frac{4\sqrt{3}}{15}$$

ÖRN: $x = \sin 2t \quad y = \cos 3t \quad t = 1$ için $dy/dx = ?$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = -3 \cdot \sin 3t \qquad \frac{dx}{dt} = 2 \cdot \cos 2t$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{\sin 3t}{\cos 2t} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{\sin 3}{\cos 2}$$

ÖRN: $xy^2 + yx^2 + xy = 8$ kapalı eğrisinin $x = 1$ apsisli noktasında teğetinin ve normalinin denklemlerini yazınız.

$x = 1$ için $\Rightarrow \quad y^2 + y + y = 8 \qquad y^2 + 2y - 8 = 0$

$$\begin{matrix} +4 & \quad y = -4 \\ -2 & \quad y = 2 \end{matrix}$$

$P_1(1, -4) \qquad P_2(1, 2)$

P_1 noktası için; $P_1(1, -4)$

$$y^2 + x \cdot 2y \cdot y' + x^2 \cdot y' + 2xy + y + x \cdot y' = 0$$

$$16 + 1 \cdot (-8) \cdot y' + 1 \cdot y' + 2 \cdot 1 \cdot (-4) + (-4) + 1 \cdot y' = 0 \Rightarrow y' = \frac{2}{3}$$

teğetin denklemi:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y + 4 = \frac{2}{3}(x - 1)$$

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{10}{3}$$

normalin denklemi:

$$y - y_0 = m'(x - x_0)$$

$$y + 4 = \frac{3}{2}(x - 1)$$

$$y = \frac{3}{2}x - \frac{11}{2}$$

P_2 noktası için ; $P_2(1,2)$

$$y^2 + x \cdot 2y \cdot y' + y' \cdot x^2 + 2x \cdot y + y + x \cdot y' = 0$$

$$4 + 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot y' + y' \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 2 + 2 + 1 \cdot y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{5}{3}$$

teğet denklemi:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 2 = -\frac{5}{3}(x - 1)$$

$$y = -\frac{5}{3}x + \frac{11}{6}$$

normal denklemi:

$$y - y_0 = m'(x - x_0)$$

$$y - 2 = \frac{3}{5}(x - 1)$$

$$y = \frac{3}{5}x + \frac{7}{5}$$

ÖRN: $x^3 + y^3 - 9xy = 0$ kapalı eğrisinin $P(2,4)$ noktasındaki teğetinin ve normalinin denklemi ?

$$3x^2 + 3 \cdot y^2 \cdot y' - 9y - 9xy' = 0$$

$$3 \cdot 4 + 3 \cdot 16 \cdot y' - 9 \cdot 4 - 9 \cdot 2 \cdot y' = 0 \Rightarrow 12 + 48y' - 36 - 18y' = 0$$

$$y' = 4/5$$

teğet denklemi:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 4 = \frac{4}{5}(x - 2)$$

$$y = \frac{4}{5}x + \frac{18}{5}$$

normal denklemi:

$$y - y_0 = m'(x - x_0)$$

$$y - 4 = -\frac{5}{4}(x - 2)$$

$$y = -\frac{5x}{4} + \frac{36}{4}$$

ÖRN: $2x^3 - 3y^2 = 8$ $\quad \frac{d^2y}{dx^2} = ?$

$$\frac{dy}{dx} = y' = 6x^2 - 6y \cdot y' = 0 \Rightarrow y' = \frac{x^2}{y}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{2xy - x^2 \cdot y'}{y^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2xy - x^2 \cdot (x^2/y)}{y^2} = \frac{2xy - x^4/y}{y^2}$$

$$= \frac{2xy^2 - x^4}{y^3}$$

ÖRN: $y^2 = x^2 + \sin xy \qquad dy/dx = ?$

$$2y\cdot y' = 2x + (y + x\cdot y')\cdot \cos xy$$

$$2y\cdot y' = 2x + y\cdot\cos xy + x\cdot y'\cdot\cos xy \Rightarrow 2\cdot y\cdot y' - xy'\cos xy = 2x + y\cdot\cos xy$$

$$y'(2y - x\cdot\cos xy) = 2x + y\cdot\cos xy$$

$$y' = \frac{2x + y\cdot\cos xy}{2y - x\cdot\cos xy}$$

ÖRN: $x = \sqrt{1-\sqrt{t}} \qquad y = \sqrt{1-\sqrt[3]{t}} \Rightarrow dy/dx = ?$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}\left(1-\sqrt[3]{t}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(-\frac{1}{3}\cdot t^{-\frac{2}{3}}\right) = -\frac{1}{6\cdot\left(\sqrt{1-\sqrt[3]{t}}\right)\cdot\sqrt[3]{t^2}}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}\cdot\left(1-\sqrt{t}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\cdot t^{-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{1}{4\cdot\left(\sqrt{1-\sqrt{t}}\right)\cdot\sqrt{t}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{1-\sqrt{t}}\cdot\sqrt{t}}{\sqrt{1-\sqrt[3]{t}}\cdot\sqrt[3]{t^2}}$$

ÖRN:

$$x = \sqrt[3]{(t^2+2)^5 + \cos^3(t^2+2)} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = ?$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{3}\cdot\left((t^2+2)^5 + \cos^3(t^2+2)\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(5\cdot(t^2+2)^4\cdot 2t - 3\cos^2(t^2+2)\cdot 2t\cdot\sin(t^2+2)\right)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{3\sqrt[3]{\left((t^2+2)^5 + \cos^3(t^2+2)\right)^2}}\cdot\left(10t(t^2+2)^4 - 3t\cdot\cos(t^2+2)\cdot\sin 2(t^2+2)\right)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{10t(t^2+2)^4 - 3t\cdot\cos(t^2+2)\cdot\sin 2(t^2+2)}{3\cdot\sqrt[3]{\left((t^2+2)^5 + \cos^3(t^2+2)\right)^2}}$$

ÖRN: $y = \arctan\sqrt{2-x^2}$ fonksiyonunun gösterdiği eğrinin $x=1$ apsisli noktasındaki teğet ve normal denklemlerini yazınız.

$x=1$ için $y = \arctan 1$ $\quad y = \frac{\pi}{4}$ $\quad P(1, \pi/4)$

$$y' = \frac{\frac{1}{2}(2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2x)}{1+(\sqrt{2-x^2})^2} = \frac{-x}{\sqrt{2-x^2}\,.(3-x^2)}$$

$x=1$ için $y' = -\frac{1}{2} = m \qquad m' = 2$

teğet denklemi $\rightarrow$ $y - \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2}(x-1)$

normal " $\rightarrow$ $y - \frac{\pi}{4} = 2(x-1)$

ÖRN: $x = \arctan^3 4t$
$y = 2\sin 4t$ parametrik denklemleri veriliyor

a. $\frac{dy}{dx} = ?$

b. $\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j}$ $\quad t = \frac{1}{4}$ için $|\vec{v}| = ?$

a. $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

$$= \frac{8.\cos 4t}{3\arctan^2 4t\cdot\frac{4}{1+16t^2}} = \frac{2.\cos 4t\,.(1+16t^2)}{3\arctan^2 4t}$$

b. $$|\vec{v}| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = ?$$

ÖRN: Toplamları 18 olan iki pozitif sayının karelerinin toplamının min. olması için bu sayılar ne olmalı?

$x+y=18 \qquad y = 18-x$

$S = x^2+y^2 = x^2+(18-x)^2$

$S' = 2x - 2(18-x) = 0 \qquad x = 18-x \qquad 2x=18$
$x=9$

$S'' = 2-[2.(-1)] = 4 > 0$ min $\quad y=9$ olur.

ÖRN: Toplamları 16 olan iki pozitif sayının küpleri toplamının min olması için sayılar ne olmalıdır.

$x+y = 16 \qquad y = 16-x$

$S = x^3+y^3 = x^3+(16-x)^3$

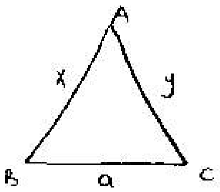
$$S' = 3x^2 + 3(16-x)^2 \cdot (-1) = 3x^2 - 3(16-x)^2 = 0$$
$$x = 8$$
$$S'' = 32 > 0 \quad \text{min} \quad y = 8$$

ÖRN: Pozitif iki sayının toplamı 12 olduğuna göre çarpımlarının 2 fazlasının max olması için sayılar ne olmalıdır

$$x + y = 12 \qquad y = 12 - x$$

$$S = xy + 2 \qquad S = x(12-x) + 2$$
$$= 12x - x^2 + 2 \qquad S' = 12 - 2x = 0 \quad x = 6$$
$$S'' = -2 < 0 \quad \text{max} \quad y = 6$$

ÖRN: Bir kenarının uzunluğu a ve çevresi $2k$ olan bir ABC üçgeninin alanının max olması için diğer kenarları ne olmalıdır.



$$x + y + a = 2k$$
$$y = 2k - a - x$$
$$S = \text{Alan} = \sqrt{k(k-a)(k-x)(k-y)}$$
$$S^2 = k(k-a)(k-x)(k-y)$$
$$S^2 = k(k-a)(k-x)(k - 2k + a + x)$$
$$= k(k-a)(k-x)(a + x - k)$$

$$\frac{dS^2}{dx} = -k(k-a)(a-k+x) + k(k-a)(k-x) = 0$$

$$(S^2)' = k(k-a)\left[-(a-k+x) + (k-x)\right] = 0$$

$$2k - 2x - a = 0 \qquad x = k - \frac{a}{2}$$

$$(S^2)'' = -2k(k-a) < 0 \quad \text{max}$$

$$y = k - \frac{a}{2}$$

ÖRN: Bir sistemin enerjisi n ve m enerji seviyelerine bağlı olarak ve A bir sabit olmak üzere $E_{nm} = A(n^2 + m^2)$ olarak veriliyor. $n + m = 12$ ise enerjinin min. olabilmesi için n ve $m = ?$

$$n + m = 12 \qquad m = 12 - n$$

$$E = A\left[n^2 + (12-n)^2\right] = A\left[n^2 + 144 - 24n + n^2\right]$$
$$= A\left[2n^2 - 24n + 144\right]$$

$$E' = A(4n - 24) = 0 \qquad n = 6$$

$E'' = A[4] > 0$ min $\hat{m} = 6$

ÖRN: $y = \arctan x - x + \frac{x^3}{3}$ fonksiyonunun gösterdiği eğrinin $x=1$ apsisli noktasındaki T.D ve N.D. yazınız.

$x=1$ için $\quad y = \arctan 1 - 1 + \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3} = \frac{3\pi - 8}{12}$

$$P\left(1, \frac{3\pi - 8}{12}\right)$$

$$y' = \frac{1}{1+x^2} - 1 + \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = \frac{1}{1+x^2} - 1 + x^2$$

$x=1$ için $\quad y' = \frac{1}{2} = m \qquad m' = -2$

T.D $\Rightarrow \quad y - \frac{3\pi - 8}{12} = \frac{1}{2}(x-1)$

N.D $\Rightarrow \quad y - \frac{3\pi - 8}{12} = -2(x-1)$

ÖRN: $y = \arctan \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \qquad x = \sqrt[3]{\arctan t} \qquad dy/dx = ?$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\dfrac{(\sqrt{1-t^2}) - t \cdot \frac{1}{2} \cdot (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2t)}{(\sqrt{1-t^2})^2}}{1 + \left(\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right)^2} = \frac{\sqrt{1-t^2} + \dfrac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}}{1 + \left(\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right)^2}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{3}(\arctan t)^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(\arctan t)^2} \cdot (1+t^2)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\sqrt{1-t^2} + \dfrac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\right) \cdot 3\sqrt[3]{(\arctan t)^2} \cdot (1+t^2)}{1 + \left(\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right)^2}$$

ÖRN: $y = \arctan \frac{2}{1+x}$ fonksiyonunun gösterdiği eğrinin $y = \pi/4$ doğrusunu kestiği noktadaki T.D ve N.D yazınız.

$$\arctan \frac{2}{1+x} = \frac{\pi}{4} \qquad x = 1 \qquad P\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$$

$$y' = \frac{\frac{-2}{(1+x)^2}}{1 + \left(\frac{2}{1+x}\right)^2} \Rightarrow x = 1 \text{ için } m = -1/4 \quad m' = 4$$

$$T.D \rightarrow y - \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{4}(x-1)$$

$$N.D \rightarrow y - \frac{\pi}{4} = 4(x-1)$$

ÖRN: $y = x^2 - 2x - 8$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

$T.A = [-\infty, \infty]$

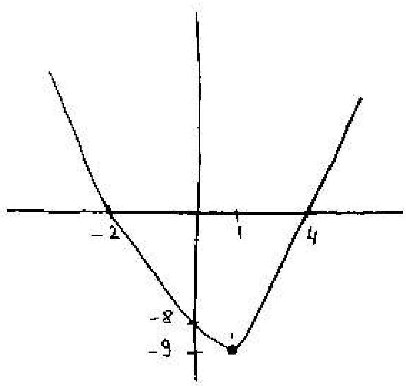
$\lim_{x \to \infty} x^2 - 2x - 8 = \infty \qquad \lim_{x \to -\infty} y = \infty$

$y' = 2x - 2 = 0 \qquad x = 1$

$y'' = 2 > 0$

Özel noktalar $x = 0$ $y = -8$, $y = 0$ $x_1 = 4$ $x_2 = -2$

x	$-\infty$		-2		0		1		4		∞
y'		−		−		−	0	+		+	
y''		+		+		+		+		+	
y	∞	↘	0	↘	-8	↘	-9 min	↗	0	↗	∞



ÖRN: $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

T.D $[-\infty, \infty]$ $x \neq \mp 1$

$\lim\limits_{x \to \mp\infty} y = 1$ yatay asimptot , düşey asimptot $x = -1$ $x = 1$

özel noktalar $x = 0$ $y = -1$

$y = 0$ kök yok

$$y' = \frac{2x(x^2-1) - (x^2+1)\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^3 - 2x - 2x^3 - 2x}{(x^2-1)^2} = 0$$

$$-4x = 0 \rightarrow x = 0$$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		+	‖	+	0	−	‖	−	
y	1	↗	‖	↗	-1 max	↘	‖	↘	1