İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi

Fizik Bölümü

ANALİZ-I

2007-2008 Öğrenim Yılı

Ders Notları

Prof. Dr. K.Gediz AKDENİZ

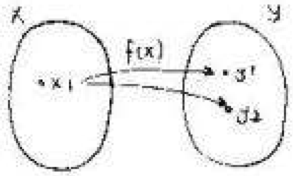
www.gedizakdeniz.com

Ders Notunu Tutan: Serhan Seyyare Aksu

— ANALİZ I —

— 2007 - 2008 Dönemi —
Notları Tutan;
Serhan Seyyare AKSU

Fonksiyonlar ve Uygulamaları



→ her x için bir y değeri vardır
→ Bazı x'ler y ile karşılık bulamaz

★ $y=\sqrt{x+2}$ $x+2=0$ $x=-2$

x		-2	
$\sqrt{x+2}$	-	0	+

tanımsız bölge

$-2 \leq x < +\infty$

★ $y=\sqrt{x^2-4}$ $x^2-4=0$ $x^2=4$ $x=\mp 2$

x		-2		2	
$\sqrt{x^2-4}$	+	0	-	0	+

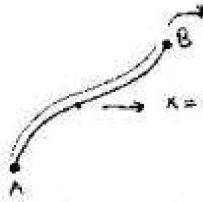
$2 \leq x < +\infty$

$-\infty < x \leq -2$ tanımsız bölge $-2<x<2$

★ $y=f(x;a)$ $y=\sqrt{x^2-a^2}$
↳ a değerine göre x'in aralığı değişir

— Fiziksel fonksiyon —

★

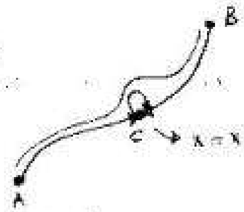


→ sondaki küçük farklılık

$x=x(t)$ zamansal evrimi var ise

A+dA → baştaki küçük farklılık

★



$x=x(t)$

C noktasına kadar belirsiz yani süreksiz c'den sonra belirli.

A+dA

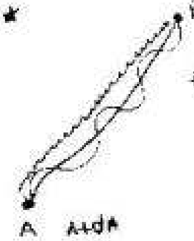
★

$x=x(t)$

tanımlı aralıkta sürekli

A+dA

★



(ideal)

periyodik

A+dA

★

kaotik

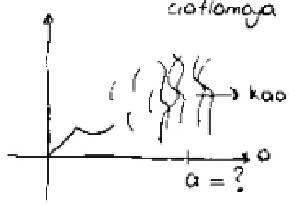
determinis değil

A+dA

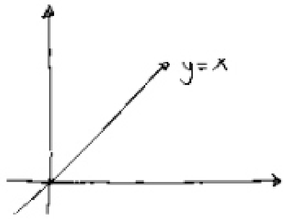
→ ne kadar sapacağını görebiliriz, hareketler belli bir hacim dışına çıkamaz ve küçük bir hacim içine giremez

→ $x=f(t)$ $x=f(t;a)$ sistem a parametrisine göre duyarlı ise bu sistem kaotik bir sistemdir. Belli a değerli için duyarlı olabilir.

★ $y = x + ax^2$ a'yı çok küçük değer olarak kabul ediyoruz. önce doğru olarak başlıyo sonra değerler büyüdükçe parabolleşiyor ve daha sonra çatlamaya başlayarak kaotikleşiyor.

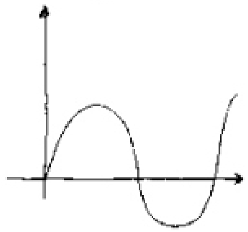


→ olayın düzenli veya düzensiz olup olmadığını olayın içindeki parametrelerle anlayabiliriz.



duyarsız

$y = 2\sin 4t$



duyarsız

⇢ dışardan müdahale edilene kadar duyarsızlar.

— MUTLAK DEĞER FONKSİYON —

→ $|a| = \sqrt{a^2}$ $|2| = \sqrt{2^2} = 2$

$|-2| = \sqrt{(-2)^2} = 2$

→ $z = a + ib$ $i^2 = -1$ $i = \sqrt{-1}$ $|z| = \sqrt{z \cdot z^*}$ $z = a + ib$

$z^* = a - bi$

$z \cdot z^* = (a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2$

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

→ $\vec{r} = a\vec{i} + b\vec{j}$ $|\vec{r}| = \sqrt{\vec{r} \cdot \vec{r}}$ $\vec{r} \cdot \vec{r} = |\vec{r}| \cdot |\vec{r}| \cdot \cos 0$

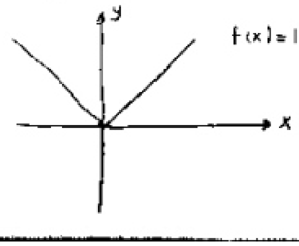
$\vec{r} \cdot \vec{r} = |\vec{r}|^2$

$\vec{r} = \sqrt{|\vec{r}|^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$

→ $f(x) = |x|$ $x = 0$

x		0	
x	−	0	+
|x|	−x		x

$$f(x) = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$$



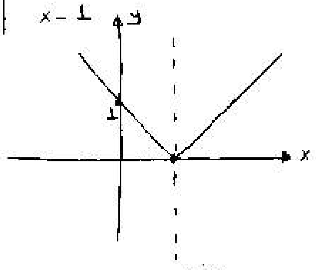
$f(x) = |x|$ çift fonksiyon.

→ $f(x) = |x-1|$ $\quad x-1=0$

$x=1$ (kritik nokta)

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	0	$+$
$\lvert x-1\rvert$	$1-x$		$x-1$

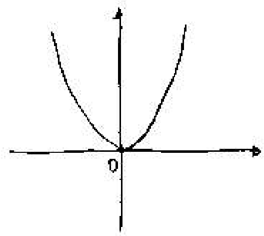
$$f(x) = |x-1| = \begin{cases} 1-x & x<1 \\ x-1 & x \geq 1 \end{cases}$$



→ $f(x) = |x^2|$ çift katlı kök

x		0	
x^2	$+$	0	$+$
$\lvert x^2\rvert$	x^2		x^2

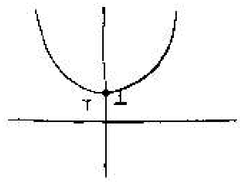
$$f(x) = |x^2| = \begin{cases} x^2 & x<0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$$



→ $f(x) = |x^2+1|$ $\quad x^2 \neq 1$ için kök yok

x	$-\infty$			$+\infty$
x^2+1	$+$	$+$	$+$	$+$
$\lvert x^2+1\rvert$	x^2+1			

$f(x) = |x^2+1| = x^2+1$



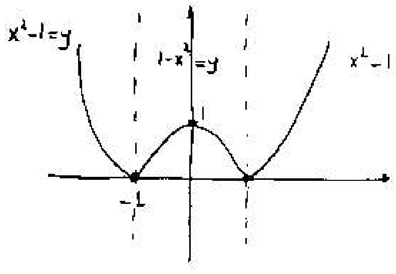
→ $f(x) = |x^2-1|$ $\quad (x-1)(x+1)=0$

$x=1 \quad x=-1$

x		-1		1	
$(x-1)$	$-$		$-$	0	$+$
$(x+1)$	$-$	0	$+$		$+$
x^2-1	$+$	0	$-$	0	$+$
$\lvert x^2-1\rvert$	x^2-1		$1-x^2$		x^2-1

NOT: Denklem 1. mertebedense köke kadar x'in işaretinin tersi, denklem 2. mertebedense üç durum söz konusu olur. Kök yoktur, çift katlı kök vardır ya da iki tane farklı kök vardır. İlk iki durumda her yer x'in işaretinin aynısı. 3. durumda ise kökler arası x'in işaretinin tersi olur.

$$f(x) = |x^2-1| = \begin{cases} x^2-1 & x < -1 \\ 1-x^2 & -1 \leq x \leq 1 \\ x^2-1 & x > 1 \end{cases}$$

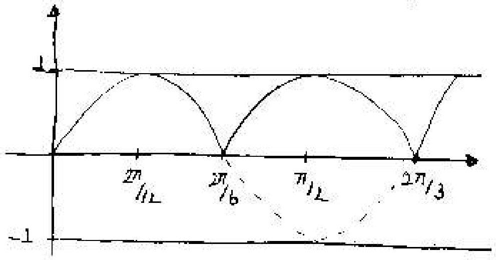


→ $f(x) = \left| \dfrac{x^2-4}{x+1} \right|$

	$x<-2$	$-2<x<-1$	$-1<x<2$	$x>2$
x^2-4	+	−	−	+
$x+1$	−	−	+	+
$\dfrac{x^2-4}{x+1}$	−	+	−	+
$\left\lvert \dfrac{x^2-4}{x+1} \right\rvert$	$\dfrac{-x^2+4}{x+1}$	$\dfrac{x^2-4}{x+1}$	$\dfrac{-x^2+4}{x+1}$	$\dfrac{x^2-4}{x+1}$

→ $f(x) = |\sin 3x|$

★ $\sin wx = y \quad w=3 \quad 2\pi f = 3$
$T = 2\pi/3$

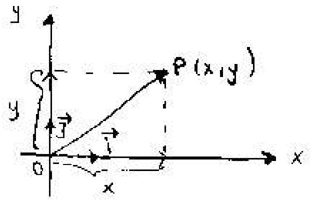


NOT: $|f(x)| = ?$ $\quad f(x_0)=0$

x		x_0	
$f(x)$	−	0	+
$\lvert f(x)\rvert$	$-f(x)$		$f(x)$

— Skaler Çarpım —

★ $|\vec{r}| = \sqrt{\vec{r}\cdot\vec{r}} = r$



$\vec{OP} = x\vec{i} + \underbrace{y\vec{j}} = \vec{r}$

$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$

⇒ $\vec{r}$ = P noktasının O noktasına göre zamansal evrimini veren "YER" vektörü dür.

★ $\vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = 1 \qquad \vec{i}\cdot\vec{j} = 0 \qquad \vec{j}\cdot\vec{i} = 0$

★ $\vec{i}\cdot\vec{j} = |\vec{i}|\,.\,|\vec{j}|\,.\cos(\vec{i},\vec{j})$ → aralarındaki açı

$= 1 \,.\, 1 \,.\, \cos 90 = 0$

★ $|\vec{r}| = \left((x\vec{i}+y\vec{j})\,.\,(x\vec{i}+y\vec{j}) \right)^{1/2}$

$\left((x\vec{i})\,.\,(x\vec{i}) + (x\vec{i})\,.\,(y\vec{j}) + (y\vec{j})\,.\,(x\vec{i}) + (y\vec{j})\,.\,(y\vec{j}) \right)^{1/2}$

→ $(x\vec{i})\,.\,(x\vec{i}) = x(x\vec{i})\,.\,\vec{i} = x^2\,.\,\vec{i}\,.\,\vec{i} = x^2$

$\rightarrow (x\vec{i}).(y\vec{j}) = y\,(x\vec{i}).\vec{j} = yx.(\vec{i}.\vec{j}) = 0$

$\rightarrow (y\vec{j}).(x\vec{i}) = x(y\vec{j})\vec{i} = xy.(\vec{j}.\vec{i}) = 0$

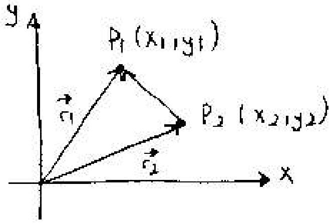
$\rightarrow (y\vec{j}).(y\vec{j}) = y(y\vec{j}).\vec{j} = y^2.(\vec{j}.\vec{j}) = y^2$

$\Rightarrow |\vec{r}| = \sqrt{(x\vec{i}+y\vec{j}).(x\vec{i}+y\vec{j})} = \sqrt{x^2+y^2}$

$\boxed{* \; |\vec{r}(t)| = \sqrt{x^2(t)+y^2(t)}}$

≫ (İndirgemeci ve analitik düşünce)

$\boxed{* \; V = V(r)}$

* 

$\vec{r_1} = \vec{r_2} + \vec{r} \qquad \vec{r} = \vec{r_1} - \vec{r_2}$

$\Rightarrow \vec{r} = (x_1\vec{i}+y_1\vec{j}) - (x_2\vec{i}+y_2\vec{j})$

$= \vec{i}(x_1-x_2) + \vec{j}(y_1-y_2)$

$* \; |\vec{r}| = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} = r$

$\Rightarrow \vec{r_1}.\vec{r_2} = (x_1\vec{i}+y_1\vec{j}).(x_2\vec{i}+y_2\vec{j})$

$= (x_1\vec{i}).(x_2\vec{i}) + (x_1\vec{i}).(y_2\vec{j}) + (y_1\vec{j}).(x_2\vec{i}) + (y_1\vec{j}).(y_2\vec{j})$

$\rightarrow (x_1\vec{i}).(x_2\vec{i}) = x_2(x_1\vec{i}).\vec{i} = x_2.x_1(\vec{i}.\vec{i}) = x_2.x_1$

$\rightarrow (x_1\vec{i}).(y_2\vec{j}) = y_2(x_1\vec{i}).\vec{j} = y_2.x_1(\vec{i}.\vec{j}) = 0$

$\rightarrow (y_1\vec{j}).(x_2\vec{i}) = x_2(y_1\vec{j})\vec{i} = x_2.y_1.(\vec{j}.\vec{i}) = 0$

$\rightarrow (y_1\vec{j}).(y_2\vec{j}) = y_2(y_1\vec{j}).\vec{j} = y_2.y_1(\vec{j}.\vec{j}) = y_2.y_1$

$* \; \vec{r_1}.\vec{r_2} = (x_1\vec{i}+y_1\vec{j}).(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}) = x_2.x_1 + y_2.y_1$

$* \; |\vec{r_1}.\vec{r_2}| = \sqrt{(x_2.x_1)^2+(y_2.y_1)^2}$

— Vektörel çarpım —

$(\vec{r_1} \times \vec{r_2}) \qquad \vec{i}\times\vec{i} = \vec{j}\times\vec{j} = 0 \qquad \vec{i}\times\vec{j} = \vec{k}$

$\vec{j}\times\vec{i} = -\vec{k}$

$\Rightarrow \vec{i}\times\vec{j} = \vec{k}$ Ters saat yönünde meydana getirdikleri dik olan bir $\vec{k}$ brm vektörüdür. Çünkü vektörel çarpımın geometrik tanımı;

$\vec{A}\times\vec{B} = |\vec{A}|.|\vec{B}|.\sin\theta$

★ $\vec{A} \times \vec{A} = 0$ olduğunu gösterelim;

$$\vec{A} \times \vec{A} = |\vec{A}| \cdot |\vec{A}| \cdot \sin\theta \Rightarrow |\vec{A}| \cdot |\vec{A}| \cdot \sin 0 = 0$$

★ $\vec{r_1} \times \vec{r_2} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j}) \times (x_2\vec{i} + y_2\vec{j})$

$$= (x_1\vec{i}) \times (x_2\vec{i}) + (x_1\vec{i} \times y_2\vec{j}) + (y_1\vec{j} \times x_2\vec{i}) + (y_1\vec{j} \times y_2\vec{j})$$

$\rightarrow (x_1\vec{i}) \times (x_2\vec{i}) = x_2(x_1\vec{i})\vec{i} = x_2 \cdot x_1 \cdot (\vec{i} \times \vec{i}) = 0$

$\rightarrow (x_1\vec{i}) \times (y_2\vec{j}) = y_2(x_1\vec{i})\vec{j} = y_2 \cdot x_1 \cdot (\vec{i} \times \vec{j}) = y_2 \cdot x_1 \cdot \vec{k}$

$\rightarrow (y_1\vec{j}) \times (x_2\vec{i}) = x_2(y_1\vec{j}) \cdot \vec{i} = x_2 \cdot y_1 \cdot (\vec{j} \times \vec{i}) = x_2 \cdot y_1 \cdot -\vec{k}$

$\rightarrow (y_1\vec{j}) \times (y_2\vec{j}) = y_2(y_1\vec{j}) \cdot \vec{j} = y_2 \cdot y_1 (\vec{j} \times \vec{j}) = 0$

★ $\vec{r_1} \times \vec{r_2} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j}) \times (x_2\vec{i} + y_2\vec{j}) = y_2 \cdot x_1 \cdot \vec{k} - x_2 \cdot y_1 \cdot \vec{k}$

$$= \vec{k}(y_2 \cdot x_1 - x_2 \cdot y_1)$$

★ $|\vec{r_1} \times \vec{r_2}| = \sqrt{(y_2 \cdot x_1 - x_2 \cdot y_1)\vec{k} \cdot (y_2 \cdot x_1 - x_2 \cdot y_1) \cdot \vec{k}}$

$$= \sqrt{(y_2 \cdot x_1 - x_2 \cdot y_1)^2 \cdot \vec{k} \cdot \vec{k}} \longrightarrow (\vec{k} \cdot \vec{k}) = 1$$

$$= \sqrt{(y_2 \cdot x_1 - x_2 \cdot y_1)^2}$$

$\Rightarrow \vec{r_1} \times \vec{r_2} = |\vec{r_1}| \cdot |\vec{r_2}| \cdot \sin\theta \cdot \vec{k} = \left| |\vec{r_1}| \cdot |\vec{r_2}| \cdot \sin\theta \cdot \vec{k} \right|$

★ $|ab| = |a| \cdot |b|$

$\Rightarrow |\vec{r_1} \times \vec{r_2}| = \left||\vec{r_1}|\right| \cdot \left||\vec{r_2}|\right| \cdot |\sin\theta| \cdot |\vec{k}|$

$$= \left||\vec{r_1}|\right| \cdot \left||\vec{r_2}|\right| \cdot \sqrt{\sin^2\theta} \cdot 1$$

$$= |\vec{r_1}| \cdot |\vec{r_2}| \cdot \sqrt{1-\cos^2\theta} \Rightarrow |\vec{r_1} \times \vec{r_2}|^2 = |\vec{r_1}|^2 \cdot |\vec{r_2}|^2 (1-\cos^2\theta)$$

$$= |\vec{r_1}|^2 \cdot |\vec{r_2}|^2 - |\vec{r_1}|^2 \cdot |\vec{r_2}|^2 \cdot \cos^2\theta$$

$$= (\vec{r_1} \cdot \vec{r_1})(\vec{r_2} \cdot \vec{r_2}) - (\vec{r_1} \cdot \vec{r_2})^2 \longrightarrow (\vec{r_1} \cdot \vec{r_2} = |\vec{r_1}| \cdot |\vec{r_2}| \cos\theta)$$

$$= |\vec{r_1} \times \vec{r_2}|^2 = (\vec{r_1}^2) \cdot (\vec{r_2}^2) - (\vec{r_1} \cdot \vec{r_2})^2$$

★ $|\vec{r_1} \times \vec{r_2}|^2 \geqslant (\vec{r_1})^2 (\vec{r_2}^2)$

★ $|\vec{r_1} \times \vec{r_2}|^2 \geqslant |\vec{r_1}|^2 \cdot |\vec{r_2}|^2$

★ $|\vec{r_1} \times \vec{r_2}| \geqslant |\vec{r_1}| \cdot |\vec{r_2}|$

$\Rightarrow \vec{A} = a_1\vec{i} + b_1\vec{j} + c_1\vec{k}$ $\quad$ ★ $\vec{A}\cdot\vec{B} = a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 + c_1 \cdot c_2$ ★

$\quad \vec{B} = a_2\vec{i} + b_2\vec{j} + c_2\vec{k}$

$|\vec{A}| = |(\vec{A}\cdot\vec{A})^{1/2}| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}$

★ $\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$ ★ $\Rightarrow \vec{A}\times\vec{B} = \vec{i}\,(b_1 c_2 - b_2 c_1) + \vec{j}\,(a_2 c_1 - a_1 c_2) + \vec{k}\,(a_1 b_2 - b_1 a_2)$

__ÖRN8__ $\vec{A} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ $\quad$ a. $\vec{A}\times\vec{B} = ?$

$\vec{B} = -\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$

$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i}\,(-6-1) - \vec{j}\,(4+1) + \vec{k}\,(2-3)$

$= -7\vec{i} - 5\vec{j} - \vec{k}$

$\vec{C} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ $\quad$ b. $\vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})$?

$\vec{A}\times\vec{B} = -7\vec{i} - 5\vec{j} - \vec{k}$

$\vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = a_3 \cdot a_1 + b_2 \cdot b_1 + c_3 \cdot c_1$

$= (-1 \cdot -7) + (-5 \cdot 2) + (2 \cdot -1) = -5$ //

$\Rightarrow [\vec{A}\vec{B}\vec{C}] \rightarrow$ karma çarpım $\quad (\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C} = [\vec{C}\vec{A}\vec{B}] = [\vec{A}\vec{B}\vec{C}]$

★ $\vec{C}\cdot(\vec{B}\times\vec{A}) = [\vec{C}\vec{B}\vec{A}]$

$(\vec{B}\times\vec{A}) = 7\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$

$\rightarrow = 5$ $\quad$ ★ $[\vec{C}\vec{B}\vec{A}] = -[\vec{C}\vec{A}\vec{B}]$

__SONUÇ:__ $[\vec{A}\vec{B}\vec{C}] = [\vec{B}\vec{C}\vec{A}] = [\vec{C}\vec{A}\vec{B}]$

$[\vec{A}\vec{B}\vec{C}] = -[\vec{B}\vec{A}\vec{C}]$

__ÖRN:__ $\vec{A} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$

$\vec{B} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ $\quad [\vec{A}\vec{B}\vec{C}] = ?$

$\vec{C} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$

$[\vec{A}\vec{B}\vec{C}] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\cdot 1 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + (-1)^{1+2}\cdot(-1)\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} +$

$(-1)^{1+3}\cdot 2 \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} =$

$= (-2-6) + (1-6) + 2\cdot(-2-4) = -8 - 5 - 12 = -25$ //

$\rightarrow \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = ?$ $\quad (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i}(-2-6) - \vec{j}(1-6) + \vec{k}(-2-4) = -8\vec{i} + 5\vec{j} - 6\vec{k}$

$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ -8 & 5 & -6 \end{vmatrix} = \vec{i}(6-10) - \vec{j}(-6+16) + \vec{k}(5-8) = -4\vec{i} - 10\vec{j} - 3\vec{k}$ //

$\star \ \vec{A} \times (2\vec{B} \times \vec{C}) = 2[\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})] = -8\vec{i} - 20\vec{j} - 6\vec{k}$

$|\vec{A} \times (2\vec{B} \times \vec{C})| = \sqrt{(-8)^2 + (-20)^2 + (-6)^2} = 22,3$

$\rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A} \quad \vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$

$\rightarrow \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = [\vec{A}\vec{B}\vec{C}] \Rightarrow$ karma çarpım

$\rightarrow \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) \Rightarrow$ üçlü vektörel çarpım

$\star \ z = a + ib \quad z^* = a - ib \quad |z| = \sqrt{z \cdot z^*}$

ÖRN: $z = \frac{2-i}{3+i} \quad |z| = ? \quad z = \frac{2-i}{3+i} \cdot \frac{(3-i)}{} = \frac{(2-i)(3+i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{5-5i}{10}$

$z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \quad z^* = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \quad |z| = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

ÖRN: $z_1 = 2 - i \quad |z_1 + 2z_2| = ?$
$z_2 = 3 + i$

$z_1 = 2 - i \quad z_1 + 2z_2 = 8 + i \quad |z_1 + 2z_2| = \sqrt{(8+i)(8-i)} = \sqrt{64 - i^2} = \sqrt{65}$
$2z_2 = 6 + 2i$

— DİZİLER ve SERİLER —

Diziler: $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ sıralanmış sayılabilir sayı kümesine dizi dır. Kısaca (a_n) ile gösterilir. a_1 dizinin ilk terimi a_n ise dizinin genel terimi olarak adlandırılır. Diziler bu genel terimde veya terimler arasındaki ilişkilerin özel durumlarına göre adlandırılır. Bazen de bir dizi o diziyi ilk kez öneren kişinin adıyla anılırlar.

$\rightarrow$ 1, 3, 5, 7, 9 . . . dizisi tek sayılar dizisi veya aralarındaki farkın hep aynı olması nedeniyle aritmetik dizi olarak adlandırılır.

$\rightarrow$ Çokça karşılaştığımız diğer bir örnek dizide 2, 4, 8, 16 . . . geometrik dizisidir. Bu dizide terimler 2 çarpanına göre artarak terimleri yazılmaktadır.

$\rightarrow a_n = 2^n \quad n = 1, 2, 3 \ldots$ diğer bir dizide altın oran sağladığından çok popüler olan Fibonacchi dizisidir. Bu dizide 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 — — şeklinde sıralanır. Yani bir terim kendinden önceki gelen 2 terimin toplamıdır. Bu dizide en önemli özellik terimler arasındaki birbirini takip eden terimler arasındaki oran n büyüdükçe altın orana yaklaşır.

Altın Oran

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

→ bu eşitlik sağlanırsa bu dikdörtgen altın orana sahiptir dnr

$$a^2 - ab - b^2 = 0$$

$$\frac{a^2}{b^2} - \frac{a}{b} - 1 = 0 \qquad \left(x = \frac{a}{b} \right)$$

$$\rightarrow \quad x^2 - x - 1 = 0 \qquad x_{1,2} = \frac{1 \mp \sqrt{5}}{2}$$

→ altın oranda pozitif değerli kök alınır $\varnothing = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ($\varnothing$ = altın oran)

$$\rightarrow \quad 2, \left(\frac{3}{2}\right)^2, \left(\frac{4}{3}\right)^3, \left(\frac{5}{4}\right)^4, \left(\frac{6}{5}\right)^5 \ \ldots \ldots$$

$$\rightarrow \left(1+\frac{1}{1}\right)^1 + \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 + \left(1+\frac{1}{4}\right)^4 + \ldots \quad - + \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2, \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 2{,}25, \left(1+\frac{1}{3}\right)^2 = 2{,}37, \left(1+\frac{1}{4}\right)^4 = 2{,}52 \ \ldots$$

$$\ldots, \left(1+\frac{1}{10}\right)^{20} = 2{,}653, \ldots\ldots, \left(1+\frac{1}{50}\right)^{50} = 2{,}691, \ldots, \left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000} = 2{,}716$$

$n \rightarrow$ çok büyük $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2{,}718282 \ldots = e$ exproransiyel büyüklük

→ Bu örneklerde görüldüğü gibi bir dizinin terimi n büyüdükçe sonlu bir sayıya yaklaşıyorsa yani dizinin terimlerinin toplamı bir sayıya yaklaşıyorsa bu diziye yakınsak, bir dizinin terimleri büyüdükçe terimlerin arasındaki ilişki bir sayıya yaklaşmıyorsa yani bir dizinin terimlerinin toplamı sonsuza yaklaşıyorsa bu diziye ıraksak dizi dnr.

Örn: $1, 4, 7, 10, 13 \ldots$

$$a_n = a_{n-1} + 3$$

$$a_n = a_1 + 3(n-1)$$

$$a_n = 1 + 3(n-1)$$

$$S_n = 1 + (1+3) + (1+2.3) + (1+3.3) \ldots$$

$n \rightarrow \infty$ giderken toplamı ?

LİMİT KAVRAMI

Eğer bir (a_n) dizisi verilmiş ise öyle bir r reel sayısı vardır ki bu r sayısı $n \geqslant N$ olduğu her durumda $|a_n - r| < \varepsilon$ olacak şekilde çok küçük ancak pozitif bir sayıya yaklaşsın o zaman $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = r$ olur. $(\{a_n\}_\infty = r)$

Eğer bu r sayısı her durum için tek ise (belirsiz değilse) bu diziye yakınsaktır dnr. Eğer dizi limit durumunda bu özelliği sağlamıyorsa bu diziye ıraksaktır dnr.

— Teoremler —

1) Yakınsak bir dizinin bir ve yalnız bir limiti vardır.
2) Bir (a_n) dizisinin en büyük bir yığılma noktası varsa bu (a_n) dizisinin üst limiti, en küçük bir yığılma noktası varsa buna (a_n) dizisinin alt limiti dır. Eğer bir dizide üst limit ve alt limit birbirine eşitse bu dizi yakınsak bir dizidir. Eğer üst limit ve alt limit eşit değilse bu dizi ıraksaktır.
3) $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ ve $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ ise

$\rightarrow \lim_{n\to\infty} (a_n \mp b_n) = a \mp b$ $\rightarrow \lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$ $\rightarrow \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$

4) Cauchy (Temel yakınsaklık teoremi): Bir (a_n) dizisinin yakınsak olabilmesi için gerek ve yeter koşul keyfi olarak seçilen $\varepsilon > 0$ çok küçük sayısına karşılık bir n doğal sayısının bulunabilmesidir öyle ki $m = 0, 1, 2, \ldots$ olmak üzere $|a_{n+m} - a_n| < \varepsilon$ eşitsizliği gerçekleşir.
5) Bir (a_n) dizisinde her n için $a_{n+1} \geq a_n$ ise bu dizi monoton artan bir dizidir. Eğer her n için $a_{n+1} \leq a_n$ ise bu dizi monoton azalan bir dizidir.

★ $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ ise ve her n için $a_n > b_n$ ise $a > b$ dir.

★ her n için $a_n > 0$ $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ ise $\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{a}$

★ her n için $a_n > 0$ ise $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ $\rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} \ln a_n = \ln a$

★ $|a| < 1$ $\lim_{n\to\infty} n\, a^n = 0$ ★ $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$

★ $a > 0$ olmak üzere $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ ★ $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

ÖRN: $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+2n+1}{n^2+1} = ?$ $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+2n+1}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}\left(n + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}{\cancel{n^2}\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}$

$\Rightarrow \frac{\infty + 2/\infty + 1/\infty^2}{1 + 1/\infty^2} = \frac{\infty + 0 + 0}{1 + 0} = \frac{\infty}{1} = \infty$

ÖRN: $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n-1}{n-n^2+1} = ?$ $\lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}\left(1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)}{\cancel{n^2}\left(\frac{1}{n} - 1 + \frac{2}{n^2}\right)} = \frac{1 + 1/\infty - 1/\infty^2}{\frac{1}{\infty} - 1 + 2/\infty^2}$

$= \frac{1 + 0 - 0}{0 - 1 + 0} = -1$ //

ÖRN: $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+3}{n^4+1} = ?$ $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+3}{n^4+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}\left(1 + \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}\right)}{\cancel{n^2}\left(n^2 + \frac{1}{n^2}\right)}$

$= \frac{1 + 2/\infty + 3/\infty^2}{\infty^2 + \frac{1}{\infty^2}} = \frac{1 + 0 + 0}{\infty + 0} = \frac{1}{\infty} = 0$

$\star \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

$\rightarrow \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{4}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{\frac{n}{4}}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{\frac{n}{4}}\right)^{\frac{n}{4}\cdot 4}$

$= \lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{\frac{n}{4}}\right)^{\frac{n}{4}}\right]^4 \Rightarrow \frac{n}{4}=k$ dersek $\lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right]^4 = e^4$

ÖRN: $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{3n}\right)^n = ?$ $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{3n}\right)^{\frac{n}{3}\cdot 3} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{3n}\right]^{1/3} = e^{1/3}$

ÖRN: $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n+4}\right)^n = ?$ $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+4-2}{n+4}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{2}{n+4}\right)^n$

$= \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{2}{n+4}\right)^n \cdot \left(1-\frac{2}{n+4}\right)^4 \cdot \left(1-\frac{2}{n+4}\right)^{-4}$

$= \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{2}{n+4}\right)^{n+4} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{2}{n+4}\right)^{-4}$

$= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{(-2)}{n+4}\right)^{n+4} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{2}{n+4}\right)^{-4} \Rightarrow n+4=k$ dersek

$= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{(-2)}{k}\right)^k \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{2}{n+4}\right)^{-4} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{\frac{k}{(-2)}}\right)^{\frac{k}{-2}\cdot(-2)} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{2}{n+4}\right)^{-4}$

$= \lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{\frac{k}{(-2)}}\right)^{\frac{k}{(-2)}}\right]^{-2} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{2}{n+4}\right)^{-4} = e^{-2} \cdot 1 = e^{-2}$ //

$\star \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a$ $\quad \star \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{na}\right)^n = \sqrt[a]{e}$

ÖRN: $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{2}{n^2}\right)^n = ?$ $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{2}{n^2}\right)^n = a$ olsun

$\lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{2}{n^2}\right)^n = \ln a$ $\quad \frac{n}{n} \cdot \ln\left(1+\frac{2}{n^2}\right)^n = \frac{1}{n} \cdot \ln\left(1+\frac{2}{n^2}\right)^{n^2}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln (1+2/n^2)^{n^2}}{n} = \frac{\ln e^2}{n} = \frac{2}{\infty} = 0$

$\ln a = 0$ $\quad a = 1$ $\quad \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{2}{n^2}\right)^n = 1$

ÖRN: $\vec{r}_n = a_n \vec{i} + b_n \vec{j}$

$a_n = \left(\frac{n+3}{n+5}\right)^n$ $\quad b_n = \left(1+\frac{1}{3n^2}\right)^n$ olmak üzere,

$\left|\lim_{n\to\infty} \vec{r}_n\right| = ?$

$$\rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+5}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+5-2}{n+5}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{(-2)}{n+5}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{(-2)}{n+5}\right)^n \cdot \left(1+\frac{(-2)}{n+5}\right)^5 \cdot \left(1+\frac{(-2)}{n+5}\right)^{-5} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{(-2)}{n+5}\right)^{n+5} \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{(-2)}{n+5}\right)^{-5}$$

$$= e^{-2} \cdot 1 = e^{-2} \,//$$

$$\rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n^2}\right)^n = a \qquad \ln a = ?$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n}{3n} \cdot \ln\left(1+\frac{1}{3n^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln\left(1+\frac{1}{3n^2}\right)^{3n^2} = \frac{\ln e}{\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\ln a = 0 \qquad a = 1 \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n^2}\right)^n = 1$$

$$\left|\lim_{n\to\infty} \vec{r}_n\right| = ? \qquad |\vec{r}_n| = \sqrt{(e^{-2})^2 + 1^2} = \left(e^{-4}+1\right)^{1/2} \,//$$

— Sonuçlar —

1) $\lim_{n\to\infty} a_n = a \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n} = a$

2) $\lim_{n\to\infty} a_n = a \qquad a_n > 0 \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n} = a$

3) $\lim_{n\to\infty} \ln b_n = \lim_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n}$

$$\lim_{n\to\infty} \ln b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n\right] = \ln a$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} b_n = a}$$

ÖRN: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ olduğuna göre $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} = e$ olduğunu gösteriniz

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \qquad a_1 = 2^1,\ a_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2,\ a_3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3 \cdots \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n = 2^1 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^3 \cdots \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{(n+1)^n}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n}$$

$$= \frac{(n+1)^n}{n!}$$

$$\{b_n\} = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n} = \sqrt[n]{\frac{(n+1)^n}{n!}} = \frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} \qquad \lim_{n\to\infty}\{a_n\} = e \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} = e$$

olur.

ÖRN: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} = e$ ise $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}} = ?$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \cdot \frac{n+1}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} \cdot \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = e.1 = e$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e \;//$$

ÖRN: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ ve $a_1 = 1$ $n > 1$ olmak üzere ifadesinin doğruluğunu ispatlayınız.

$$a_n = \frac{n}{n-1} \qquad a_1 = 1,\ a_2 = \frac{2}{1},\ a_3 = \frac{3}{2},\ a_4 = \frac{4}{3} \ \cdots \quad a_n = \frac{n}{n-1}$$

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n = 1 \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{n}{n-1} = n$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n-1} = 1$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ olduğu ispatlanır

ÖRN: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1} = 1$ $\{a_n\} = \dfrac{n+1}{n}$ limitinin doğruluğunu bulunuz

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n = \frac{\cancel{2}}{1} \cdot \frac{3}{\cancel{2}} \cdot \frac{4}{\cancel{3}} \cdots \frac{n+1}{\cancel{n}} = n+1$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$$ olduğu bulunur

ÖRN: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[1]{1} + \sqrt[2]{2} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[4]{4} + \cdots + \sqrt[n]{n}}{n \cdot \sqrt[n]{1 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{5}{8} \cdots \frac{n+1}{2n}}} = ?$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[1]{1} + \sqrt[2]{2} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[4]{4} + \cdots + \sqrt[n]{n}}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{1 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{5}{8} \cdots \frac{n+1}{2n}}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \cdot \frac{1}{\lim \frac{n+1}{2n}} = 1 \cdot 2 = 2 \;//$$

ÖRN: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^2}{\sqrt[n]{(n+1)!} \cdot (3 + \sqrt{3} + \sqrt[3]{3} + \cdots + \sqrt[n]{3})} = ?$ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^2}{\sqrt[n]{n!} \cdot \sqrt[n]{(n+1)} \cdot \dfrac{(3 + \sqrt{3} + \sqrt[3]{3} + \cdots + \sqrt[n]{3})}{n} \cdot n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3 + \sqrt{3} + \sqrt[3]{3} + \cdots + \sqrt[n]{3}}{n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3} = 3^{\frac{1}{n}} = 3^{\frac{1}{\infty}} = 3^0 = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(n+1)} = 1 \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{\sqrt[n]{n!} \cdot 1 \cdot 1 \cdot n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}^2 \left(1 + \frac{2}{n^2}\right)}{\cancel{n} \cdot \sqrt[n]{n!}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e \;//$$

— SERİLER —

$a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$ reel bir dizi olmak üzere $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ ifadesine seri denir.

Burada a_n serinin genel terimini gösterir. $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ sonlu toplamına serinin kısmi toplamı denir. Eğer kısmi toplamlardan oluşan $\{S_n\}$ dizisi yakınsak ve kısmi toplamın $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ gibi $n \to \infty$ giderken sonlu bir S sayısına gidiyorsa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsaktır ve $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ dır yani S serisinin toplamıdır.

$\{S_n\}$ kısmi toplamlar dizisi ıraksak ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisine ıraksaktır denir. Bu durumda $\lim_{n\to\infty} S_n = \mp\infty$ ise seriye sonsuz ıraksak denir. Yani serinin toplamı sonsuza gidiyordur.

Bu durumda $\lim_{n\to\infty} S_n$ mevcut değilse belirsiz ıraksak denir.

Sonuçlar:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yakınsak ve c sbt bir sayı olmak üzere $\sum_{n=1}^{\infty} c\,a_n$ serisi de yakınsaktır.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ serileri yakınsak ise bunların toplamı olan $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \mp b_n)$ serisi de yakınsaktır.

Geometrik Seri

$\sum_{n=1}^{\infty} aq^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$, $\sum_{n=-1}^{\infty} aq^n$ serileri verilsin;

① $S_n = aq^1 + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^n$

② $S_n = aq^0 + aq^1 + aq^2 + \ldots + aq^{n-1}$ $\Rightarrow a(1 + q + q^2 + \ldots q^{n-1}) = a.\frac{1-q^n}{1-q}$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} |q| < 1 \Rightarrow a.\frac{1}{1-q} & \text{yakınsak} \\ |q| > 1 \Rightarrow \pm\infty & \text{ıraksak} \end{cases}$$

ÖRN: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

$S_n < 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ $\quad \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{A}{\underset{(k-1)}{k}} + \frac{B}{\underset{(k)}{k-1}} = \frac{Ak - A + Bk}{k(k-1)}$

$A + B = 0 \quad B = 1 \quad A = -1$

$\frac{1}{k(k-1)} = \frac{-1}{k} + \frac{1}{k-1} \Rightarrow k = 2$ için $\frac{-1}{2} + \frac{1}{1}$

$k = 3$ için $\frac{-1}{3} + \frac{1}{2}$

$\vdots$

$+ \; k = n$ için $\frac{-1}{n} + \frac{1}{n-1}$

$= 1 - \frac{1}{n}$

$S_n < 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{n} \Rightarrow S_n < 2 - \frac{1}{n}$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n < 2 - \frac{1}{\infty} = 2 \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 2$ serisi yakınsaktır.

ÖRN: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)$ serisini inceleyin.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}\right) - \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}\right) \qquad \left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)$$

$n=1 \quad \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}+1}$

$n=2 \quad \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

$n=3 \quad \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}$

$\vdots$

n için $\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \Rightarrow S_n = \frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{2}+1}$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{\infty} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} = -\frac{1}{\sqrt{2}+1} \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = 1 - \sqrt{2}$ yakınsak

$(\sqrt{2}-1)$

ÖRN: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2 \cdot (n+1)^2}$ serisini inceleyiniz.

$$\frac{2n+1}{n^2 \cdot (n+1)^2} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n^2} + \frac{C}{n+1} + \frac{D}{(n+1)^2}$$

$$\frac{2n+1}{n^2 (n+1)^2} = \frac{n^2 - n^2 + 2n + 1}{n^2 \cdot (n+1)^2} = \frac{(n^2+2n+1) - n^2}{n^2 \cdot (n+1)^2} = \frac{(n+1)^2 - n^2}{n^2 \cdot (n+1)^2} = \frac{(n+1)^2}{n^2 \cdot (n+1)^2} - \frac{n^2}{n^2 (n+1)^2}$$

$= \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \Rightarrow a_1 = 1 - \frac{1}{2^2}$

$a_2 = \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}$

$a_3 = \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2}$

$\vdots$

$a_n = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$

$+$

$S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$

$= 1 - \frac{1}{\infty} = 1$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2 \cdot (n+1)^2} = 1$ yakınsak

MUKAYESE TESTİ

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ pozitif terimli iki seri olsun herhangi bir $n \geq N$ için,

a. $a_n \leq b_n$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ serisi yakınsak ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi de yakınsaktır.

b. $a_n \geq b_n$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ serisi ıraksak ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi de ıraksaktır.

limit hali:

1) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = M \neq 0$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ serilerinin doğaları aynıdır

2) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ serisi yakınsak ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi de yakınsaktır

3) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ " ıraksak " " " ıraksaktır

ÖRN: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{n^4+1}$ serisinin karakterini inceleyiniz.

$\frac{n^2-1}{n^4+1} < \frac{n^2}{n^4+1} < \frac{n^2}{n^4} = \frac{1}{n^2}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ serisi yakınsak olduğundan

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{n^4+1}$ serisi de yakınsaktır.

limit durumu: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{n^4+1}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2-1}{n^4+1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(n^2-1)}{n^4+1} = 1 \neq 0$

ikisinin de karakterleri aynıdır $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ serisi yakınsak olduğu için $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{n^4+1}$ serisi de yakınsaktır

ÖRN: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ serisini doğasını mukayese testi ile inceleyiniz.

$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} > \frac{1}{\sqrt{n(n+n)}} = \frac{1}{\sqrt{2n^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot n}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ serisi ıraksak olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}n}$ serisi de ıraksaktır Bundan büyük kalan terimlere sahip $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ de ıraksaktır.

limit durumu: $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n(n+1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/2}} = 1 \neq 0$

her ikisinde doğası aynıdır.

ORAN TESTİ

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitif terimli bir seri olsun her $n \geq N$ için

1. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq k < 1$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsaktır
2. $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi ıraksaktır

Limit durumu: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = k$ ise

1) $k<1$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsaktır.

2) $k>1$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ " ıraksaktır

3) $k=1$ ise eğer 1 değerine büyük değerlerle yaklaştığı gösterilebiliyorsa seri ıraksaktır. Eğer 1 değerini küçük değerle yaklaştığı anlaşılırsa serinin yapısı hakkında birşey söylemek belirsizleşir. O zaman yapmamız gereken bu serinin doğasını anlamak için başka testlere müracaat etmektir veya oran testinin bir alt testi olan RAABE testine müracaat edilebilir.

RAABE Testi: $R_n = n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ ifadesini bulup ifadenin limiti alınır $\lim_{n\to\infty} R_n = k$

ise;

* $k>1$ için $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsaktır
* $k<1$ için $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ " ıraksaktır.
* $k=1$ için belirsizliğini korur.

ÖRN: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ serisinin doğasını oran testi ile inceleyiniz.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$$

limit ifadesi 1'e eşit olduğu için belirsizlik vardır.

$$R_n = n\left(1 - \frac{n^2}{(n+1)^2}\right) = n\left(\frac{(n+1)^2 - n^2}{(n+1)^2}\right) = n\left(\frac{2n+1}{n^2+2n+1}\right) = \frac{2n^2+1}{n^2+2n+1}$$

$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+1}{n^2+2n+1} = 2 > 1$ olduğu için $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ serisi yakınsaktır.

ÖRN: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+1}{n+3} \cdot e^{-n}$ serisini inceleyiniz.

$a_n = \frac{2n^2+1}{n+3} \cdot e^{-n}$ $\quad a_{n+1} = \frac{2(n+1)^2+1}{n+4} \cdot e^{-(n+1)}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2(n+1)^2+1}{n+4} \cdot \frac{n+3}{2n^2+1} \cdot \frac{e^{-(n+1)}}{e^{-n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{[2(n+1)^2+1].(n+3)}{(n+4)(2n^2+1)} . e^{-1} = 1 . \frac{1}{e} \Rightarrow e^{-1} < 1$$

olduğu için oran testine göre $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+1}{n+3} . e^{-n}$ serisi yakınsaktır.

ÖRN: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)!}{n!\, 3^n}$ serisini inceleyiniz

$$a_n = \frac{(n+3)!}{n!\,.3^n} \qquad a_{n+1} = \frac{(n+4)!}{(n+1)!\,.3^{n+1}} \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+4)!}{(n+1)!\,.3^{n+1}} . \frac{n!\,.3^n}{(n+3)!}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+4}{(n+1).3} = \frac{1}{3} < 1 \text{ olduğundan}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)!}{n!\,.3^n}$ serisi yakınsaktır.

ÖRN: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2.5.8 \ldots (3n-1)}{1.3.5 \ldots (2n-1)}$ serisini inceleyiniz

$$a_{n+1} = \frac{2.5.8 \ldots (3n-1)(3n+2)}{1.3.5 \ldots (2n-1)(2n+1)} . \frac{1.3.5 \ldots (2n-1)}{2.5.8 \ldots (3n-1)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+2}{2n+1} = \frac{3}{2} > 1 \text{ olduğu için}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2.5.8 \ldots (3n-1)}{1.3.5 \ldots (2n-1)}$ serisi de ıraksaktır.

CAUCHY KÖK TESTİ

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi pozitif terimli bir seri olsun ve $n>N$ için

- $\sqrt[n]{a_n} \leq k < 1$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsak
- $\sqrt[n]{a_n} > 1$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi ıraksaktır.

Limit durumu: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = k$ ise;

1) $k<1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsak
2) $k>1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ " ıraksak

3) $k=1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi belirsizdir. Bu durumda 1'e yaklaşım incelenerek serinin karakteri saptanmaya çalışılsa da burada yapılacak daha doğru hareket başka bir teste danışmakla olur.

ÖRN: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n . n!}{n^n}$ serisinin karakterini kök testi kullanarak bulunuz.

$$a_n = \frac{2^n . n!}{n^n} \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{2^n . n!}{n^n}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \to \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2^n . n!}}{\sqrt[n]{n^n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2 . \sqrt[n]{n!}}{n} \qquad \left(\text{DİPNOT: } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \text{ ve } \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}, \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e \right)$$

$= 2 . \frac{1}{e} < 1$ olduğu için $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n . n!}{n^n}$ serisi yakınsaktır.

ÖRN: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n . n!}{n^n}$ serisini oran testine göre inceleyiniz.

$$a_n = \frac{2^n . n!}{n^n} \qquad a_{n+1} = \frac{2^{n+1} . (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = ?$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\cancel{2^n} . 2 . \cancel{(n+1)} . \cancel{n!}}{\underbrace{(n+1)^{n+1}}_{(n+1)^n}} . \frac{n^n}{\cancel{2^n} . \cancel{n!}} \Rightarrow \frac{2 . n^n}{(n+1)^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 . n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} 2 . \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} 2 . \left(\frac{1}{\frac{n+1}{n}}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty} 2 . \left(\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)} \right)^n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} 2 \left(\frac{1^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \right) \Rightarrow 2 . \frac{1}{e} < 1 \text{ olduğu için}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n . n!}{n^n}$ serisi yakınsaktır.

ÖRN: $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n} . \left(\frac{n}{n+4}\right)^{2n^2}$ serisinin karakterini kök testi ile inceleyiniz.

$$a_n = e^{-2n} . \left(\frac{n}{n+4}\right)^{2n^2} \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{e^{-2n} . \left(\frac{n}{n+4}\right)^{2n^2}} = \left[e^{-2n} . \left(\frac{n}{n+4}\right)^{2n^2}\right]^{\frac{1}{n}}$$

$$= e^{-2} . \left(\frac{n}{n+4}\right)^{2n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} e^{-2} . \left(\frac{n}{n+4}\right)^{2n} = ?$$

$$\lim_{n\to\infty} e^{-2}\cdot\left(\frac{n}{n+4}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty} e^{-2}\cdot\left(\frac{1}{\frac{n+4}{n}}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty} e^{-2}\cdot\left(\frac{1}{\left(1+\frac{4}{n}\right)}\right)^{2n}$$

$$\lim_{n\to\infty} e^{-2}\cdot\left(\frac{1^n}{\left(1+\frac{4}{n}\right)^n}\right)^2 = e^{-2}\cdot\frac{1}{(e^4)^2} = \frac{1}{e^{10}} = e^{-10}//$$

$e^{-10}<1$ olduğu için $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n}\left(\frac{n}{n+4}\right)^{2n^2}$ serisi yakınsaktır.

ÖRN: $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{\frac{-2n^3+n^2+1}{n^2+4}}$ serisinin kök testi ile karakterini inceleyiniz

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(3^{\frac{-2n^3+n^2+1}{n^2+4}}\right)^{\frac{1}{n}} = 3^{\frac{-2n^3+n^2+1}{n^2+4}\cdot\frac{1}{n}} = 3^{\frac{-2n^3+n^2+1}{n^3+4n}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} 3^{\frac{-2n^3+n^2+1}{n^3+4n}} = 3^{\lim_{n\to\infty}\frac{-2n^3+n^2+1}{n^3+4n}} = 3^{-2} < 1$$

olduğu için $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{\frac{-2n^3+n^2+1}{n^2+4}}$ serisi yakınsaktır.

ÖRN: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n(n+2)}$ serisini karakterini kök testi ile inceleyiniz.

$$\sqrt[n]{a_n} = \left[\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n(n+2)}\right]^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n+2} = \left(\frac{1}{\frac{n+3}{n+2}}\right)^{n+2}$$

$$= \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n+2}}\right)^{n+2} \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{1^{n+2}}{\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{n+2}}\right) = \frac{1}{e} < 1$$

olduğu için $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n(n+2)}$ serisi yakınsaktır.

ÖRN: $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-3n}\cdot\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n^2}$ serisinin karakterini kök testiyle inceleyiniz.

$$a_n = e^{-3n}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n^2} \quad \sqrt[n]{a_n} = \left[e^{-3n}\cdot\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{n}} = e^{-3}\cdot\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} e^{-3}\cdot\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} e^{-3}\cdot\left(1-\frac{1}{n+2}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty} e^{-3}\cdot\left(1-\frac{1}{n+2}\right)^n\cdot\left(1-\frac{1}{n+2}\right)^2\left(1-\frac{1}{n+2}\right)^{-2}$$

a) $\lim\limits_{n\to\infty} e^{-3}.\left(1-\frac{1}{n+2}\right)^{n+2}.\left(1-\frac{1}{n+2}\right)^{-2} = e^{-3}.e^{-1}.1 = e^{-4} = \frac{1}{e^4} < 1$ olduğu için

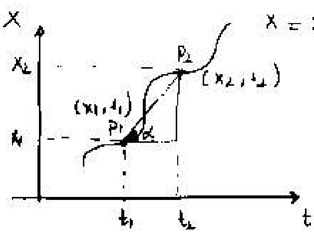
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-3n}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n^2}$ serisi yakınsaktır.

SONSUZ KÜÇÜKTÜR MATEMATİKDE DİFERANSİYEL ve İNTEGRAL HESAP ve UYGULAMALARI (FİZİKTE)

— TÜREV ve UYGULAMALARI —

$\text{Hız} = \frac{\text{yol}}{\text{zaman}} \rightarrow V = \frac{S}{t}$ Ortalama hız $\Rightarrow V = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S_2 - S_1}{t_2 - t_1}$

sürekli olursa;



$X = X(t)$ zamansal evrimi

$t_2 - t_1$ ve $X_2 - X_1$ farkını sıfıra götürmemiz gerek

$t_2 - t_1 = \Delta t$

$X_2 - X_1 = \Delta X$ $\tan\alpha = \frac{\Delta X}{\Delta t} = \text{eğim} \cong \alpha$

$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta X}{\Delta t}\right) = \frac{dx}{dt} = V$ (X'in t'ye göre türevi)

$\Rightarrow$ eğer bir parçacık $x = x(t)$ gibi zamansal evrimini biliyorsak;

$$\Delta X = (X + \Delta X) - X$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(x+\Delta x) - x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

ÖRN: Bir maddesel noktanın zamansal evrimi $x = t^2$ ile verilmiştir. Bu noktanın herhangi bir andaki hızını bulunuz.

$x(t+\Delta t) = (t+\Delta t)^2$ $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{x(t+\Delta t) - x}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{(t+\Delta t)^2 - t^2}{\Delta t}$

$x(t) = t^2$

$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{t^2 + 2.t.\Delta t + \Delta t^2 - t^2}{\Delta t} \Rightarrow \lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{2t.\Delta t}{\Delta t} = 2t$ $V = 2t$

($\Delta t^2 <<< 1$ olduğu için $\Delta t^2 \cong 0$)

SONUÇ: $x(t) = t^n \Rightarrow \frac{dx}{dt} = n \cdot t^{n-1}$

ÖRN: Bir maddesel noktanın zamansal evrimi $X = 2\sin 3t$ ile verilmiştir. Bu noktanın herhangi bir andaki hızı?

$$V = \frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2\sin 3(t+\Delta t) - 2\sin 3t}{\Delta t}$$

$$\sin 3(t+\Delta t) = \sin 3t \cdot \cos 3\Delta t + \sin 3\Delta t \cdot \cos 3t = \sin 3t + 3\Delta t \cdot \cos 3t$$

$$\left(\begin{array}{l} \cos 3\Delta t \cong 1 \\ \sin 3\Delta t \cong 3\Delta t \end{array} \right)$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\cancel{2\sin 3t} + 6\Delta t \cdot \cos 3t - \cancel{2\sin 3t}}{\Delta t} = 6\cos 3t = \vartheta$$

SONUÇ: $X = R \cdot \sin\omega t \qquad \frac{dx}{dt} = R\omega \cdot \cos\omega t$

$X = R \cdot \cos\omega t \qquad \frac{dx}{dt} = -R\omega \cdot \sin\omega t$

FİZİKSEL SONUÇLAR

1) $V = \frac{dx}{dt}$

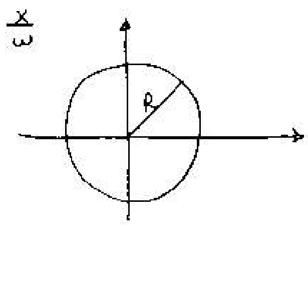
2) $X = R \cdot \sin\omega t \qquad R = max$ genlik
$\omega = 2\pi f$ (açısal hız)

$$\dot{X} = \frac{dx}{dt} = R\omega\cos\omega t \qquad \omega X = \omega R \cdot \sin\omega t$$

$$\dot{X}^2 = \omega^2 \cdot R^2 \cdot \cos^2\omega t$$
$$\omega^2 \cdot X^2 = \omega^2 \cdot R^2 \cdot \sin^2\omega t$$
$$+$$

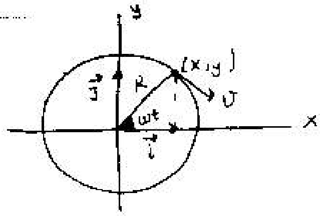
$$\omega^2 X^2 + \dot{X}^2 = \omega^2 \cdot R^2$$

$$X^2 + \frac{\dot{X}^2}{\omega^2} = R^2$$



$\Rightarrow$ Faz uzayı

3) Dairesel Hareket



$x = R \cdot \cos wt$

$y = R \cdot \sin wt \qquad \vec{r} = R = R \cdot \cos wt\,\vec{i} + R \cdot \sin wt\,\vec{j}$

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -Rw \sin wt\,\vec{i} + R \cdot w \cos wt\,\vec{j}}$$

→ çizgisel hız vektörü

$\vec{r} \cdot \vec{v} = 0$ bu iki vektör birbirine diktir

$\vec{r} \cdot \vec{v} = |\vec{r}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\theta \qquad \theta = \pi/2$

$|\vec{v}| = Rw$ çizgisel hızla açısal frekans arasındaki ilişki

— TÜREV TEKNİKLERİ —

1) Türevin toplam ve çıkarma durumu

$$\frac{df}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(f+\Delta f) - f}{\Delta t} \qquad \begin{aligned} f &= f_1 + f_2 \\ f + \Delta f &= f_1 + \Delta f_1 + f_2 + \Delta f_2 \end{aligned}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{f_1 + \Delta f_1 + f_2 + \Delta f_2 - f_1 - f_2}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f_1 + \Delta f_2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f_1}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f_2}{\Delta t}$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{df_1}{dt} + \frac{df_2}{dt}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt} = (f_1 \mp f_2) = \frac{df_1}{dt} \mp \frac{df_2}{dt}}$$

2) Zincir kuralı

$f(t) = g(u)$

$$\frac{dF(f(t))}{dt} = \frac{dF(g(u))}{du} \cdot \frac{du}{dt}$$

<u>ÖRN:</u> $f(t) = (t^3 + 1)^4 \rightarrow \frac{df}{dt} = ?$

$u = t^3 + 1 \qquad f(u) = u^4 \qquad \frac{df}{dt} = \frac{df}{du}\,\frac{du}{dt}$

$$\frac{d f(u)}{du} = 4u^3 \qquad \frac{du}{dt} = 3t^2$$

$$\frac{df}{dt} = 4u^3 \cdot 3t^2 = 4(t^3+1)^3 \cdot 3t^2$$

SONUÇ: $f(t) = u(t)^n \qquad \frac{df}{dt} = f'(t) = f' = nu'(t) \cdot u(t)^{n-1}$

ÖRN: $f(t) = \sqrt[3]{t^2+1+\sin 2t} \qquad f'(t) = ?$

$$f(t) = (t^2+1+\sin 2t)^{1/3}$$

$$f'(t) = \frac{1}{3}(t^2+1+\sin 2t)^{-\frac{2}{3}} \cdot (2t+2\cos 2t)$$

$$= \frac{2t+2\cos 2t}{3\sqrt[3]{(t^2+1+\sin 2t)^2}}$$

ÖRN: $f(t) = 3\cos^6 3t \qquad f'(t) = ?$

$$f'(t) = -3 \cdot 6 \cdot \cos^5 3t \cdot 3 \cdot \sin 3t$$

$$= -54 \cdot \cos^5 3t \cdot \sin 3t$$

$$= -27 \cdot 2 \cos^4 3t \cdot \cos 3t \cdot \sin 3t$$

$$= -27 \cdot \cos^4 3t \cdot \sin 6t$$

SONUÇ: $f(t) = \cos u(t)$

$$\frac{df}{dt} = \frac{du}{dt} \cdot \frac{d}{du} f = -u' \cdot \sin u(t)$$

$$f(t) = \sin u(t)$$

$$\frac{df}{dt} = u' \cdot \cos u(t)$$

ÖRN: $f(t) = \sin(t^3+2t^2+5) \qquad f'(t) = ?$

$$f'(t) = (3t^2+4t) \cdot \cos(t^3+2t^2+5)$$

ÖRN: $f(t) = \cos^3 \sqrt[4]{t^2+1}$ ise $f'(t) = ?$

$$f'(t) = -3\cos^2 \sqrt[4]{t^2+1} \cdot \frac{1}{4_2} \cdot (t^2+1)^{-\frac{3}{4}} \cdot 2t \cdot \sin \sqrt[4]{t^2+1}$$

$$= -\frac{3}{2} \cdot \cos^2 \sqrt[4]{t^2+1} \cdot \sin \sqrt[4]{t^2+1} \cdot \frac{t}{\sqrt[4]{(t^2+1)^3}}$$

3) Çarpım Türevi

$f = f_1 \cdot f_2 \Rightarrow f + \Delta f = (f_1 + \Delta f_1)(f_2 + \Delta f_2)$

$= f_1 \cdot f_2 + f_1 \cdot \Delta f_2 + \Delta f_1 \cdot f_2 + \cancel{\Delta f_1 \cdot \Delta f_2}^{\to 0}$

$= f_1 \cdot f_2 + f_1 \cdot \Delta f_2 + \Delta f_1 \cdot f_2$

$$\frac{df}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(f + \Delta f) - f}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\cancel{f_1 \cdot f_2} + f_1 \cdot \Delta f_2 + \Delta f_1 \, f_2 - \cancel{f_1 \cdot f_2}}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{f_1 \cdot \Delta f_2}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f_2 \cdot \Delta f_1}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow f_1 \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f_2}{\Delta t} + f_2 \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f_1}{\Delta t} \Rightarrow \frac{df}{dt} = f_1 \cdot \frac{df_2}{dt} + f_2 \cdot \frac{df_1}{dt}$$

ÖRN: $f(t) = (t^3+1)^4 \cdot \cos^3 \sqrt{t+1}$ $\qquad \frac{df}{dt} = ?$

$$\frac{df}{dt} = 4 \cdot (t^3+1)^3 \; 3t^2 \cdot \cos^3 \sqrt{t+1} - (t^3+1)^4 \cdot 3\cos^2 \sqrt{t+1} \cdot \frac{1}{2} (t+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot \sin \sqrt{t+1}$$

$$= 12t^2 \cdot (t^3+1)^3 \cdot \cos^3 \sqrt{t+1} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{t+1}} \cdot (t^3+1)^4 \cdot \cos^2 \sqrt{t+1} \cdot \sin \sqrt{t+1}$$

4) Bölümün Türevi

$f = \frac{u(t)}{v(t)}$ $\qquad u = u(t) \qquad v = v(t) \qquad \frac{df}{dt} = ?$

$$f = \frac{u}{v} = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} = \frac{u + \Delta u}{v + \left(1 + \frac{\Delta v}{v}\right)}$$

$(1 - x^2) = (1 - x)(1 + x)$ $\qquad \frac{1}{1 - x^2} = \frac{1 - x}{1 - x^2}$ $\qquad |x| \ll 1 \quad x^2 \cong 0$

$$\frac{1}{1+x} \cong 1 - x$$

$\left|\frac{\Delta v}{v}\right| \ll 1$ $\qquad \frac{1}{1 + \frac{\Delta v}{v}} \cong 1 - \frac{\Delta v}{v}$

$$\frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} = \frac{u + \Delta u}{v} \cdot \left(1 - \frac{\Delta v}{v}\right) = \frac{(u + \Delta u)(v - \Delta v)}{v^2}$$

$$= \frac{uv - u\Delta v + \Delta u \, v - \cancel{\Delta u \cdot \Delta v}^{\to 0}}{v^2} = \frac{uv - u \cdot \Delta v + \Delta u \cdot v}{v^2}$$

$$\frac{df}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(f+\Delta f) - f}{\Delta t}$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{u}{v}\right) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v} - \frac{u}{v}}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{uv - u\Delta v + \Delta u . v}{v^2} - \frac{u}{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\cancel{\frac{u}{v}} + \frac{\Delta u v - u \Delta v}{v^2} - \frac{u}{v}}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{\Delta u v}{\Delta t} - \frac{u \Delta v}{\Delta t}}{v^2} = \frac{u' v - u . v'}{v^2}$$

ÖRN: $f(t) = \frac{(t+1)^4}{\sin^2 3t} \qquad \frac{df}{dt} = ?$

$$f'(t) = \frac{4(t+1)^3 . \sin^2 3t - (t+1)^4 . 2 . \sin 3t . \cos 3t . 3}{\sin^4 3t}$$

$$= \frac{4(t+1)^3 . \sin^2 3t - 3(t+1)^4 . \sin 6t}{\sin^4 3t}$$

ÖRN: $f(t) = \frac{t^2 + \sin^3 6t}{\cos^2 \sqrt{t^2+1}} \qquad f'(t) = ?$

$$f'(t) = \frac{\left[(2t + 3\sin^2 6t . 6 . \cos 6t)\cos^2\sqrt{t^2+1}\right] + \left[(t^2+\sin^3 6t).(2\cos\sqrt{t^2+1} . \frac{1}{2} . (t^2+1)^{-\frac{1}{2}} . 2t . \sin\sqrt{t^2+1}\right.}{\left(\cos^2\sqrt{t^2+1}\right)^2}$$

$$= \frac{\left[(2t + 9 . \sin 6t . \sin 12t).(\cos^2\sqrt{t^2+1})\right] + \left[(t^2+\sin^3 6t).(\frac{2t}{\sqrt{t^2+1}} . \sin\sqrt{t^2+1} . \cos\sqrt{t^2+1})\right]}{\cos^4\sqrt{t^2+1}}$$

TÜREVİN FİZİKTE OPERATÖR ANLAMI

$x' = x + a$ olsun a reel bir parametre

x a kadar ötelenip x' noktasına geçmiştir.

$x' = f(x; a)$ ifadesinin fiziksel olabilmesi için grup özelliği göstermesi gerekir.

* $x = x'' + b \quad x' = x'' + a + b \quad c = a + b \Rightarrow x' = x'' + c$ (kapalılık öz)

* $x = x + 0 \quad a = 0$ olduğu değer x'in brm elemanıdır.

* $x' = x + a \quad x' + (-a) = x + a + (-a)$
$x = x' + (-a)$ ters eleman mevcuttur

⟹ Asosyatif özelliğide gösterebilir. Çünkü parametreler reel sayıların özelliklerini gerçekliyor.

$$x' = f(x; a) \qquad x = f(x; 0) \qquad x = f(x; (-a))$$

$$x = x + 0 \Rightarrow x + dx = x + (0 + da)$$
$$dx = da$$

$$F = F(x)$$
$$dF = \frac{dF}{dx}\,dx \qquad \lim_{\Delta x \to 0} dF = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{dF}{dx}\,da = \frac{dF}{dx}\,da$$

$D = \frac{d}{dx}$ bu ötelemeye karşılık gelen operatör olur.

Örn: $x' = ax \rightarrow$ boyca büyüme dönüşümü
$x' = ax + b \rightarrow$ boyca büyüme ve öteleme dönüşümü

ÖRN: $[A, B] = AB - BA$ ise $\left[\frac{d}{dx}, x\right] = ?$
(komütatör) operatör

$$\left[\frac{d}{dx}, x\right] f = \left(\frac{d}{dx} x - x \frac{d}{dx}\right) f = \frac{d}{dx}(xf) - x\frac{df}{dx}$$
$$= f + x\frac{df}{dx} - x\frac{df}{dx} = f$$

$$\left[\frac{d}{dx}, x\right] f = f \qquad \left[\frac{d}{dx}, x\right] = 1$$

$\left[\frac{d}{dx}, x\right] \neq 0$ iki operatör komite olduğunda sıfırı vermiyorsa bu operatörlere karşılık gelen ölçümler aynı ----- yapılamaz

ÖRN: $A \equiv x^2$
$B \equiv x\frac{d}{dx}$ olduğuna göre $[A, B] = ?$

$$[A, B] = \left[x^2, x\frac{d}{dx}\right] = ?$$

$$\left[x^2, x\frac{d}{dx}\right]f = x^2\left(x\frac{df}{dx}\right) - x\frac{d}{dx}\left(x^2 f\right)$$

$$= x^3\frac{df}{dx} - x\left(2xf + x^2\frac{df}{dx}\right) = x^3\frac{df}{dx} - 2x^2 f - x^3\frac{df}{dx} = -2x^2 f$$

$$\left[x^2, x\frac{d}{dx}\right]f = -2x^2 f \qquad \left[x^2, x\frac{d}{dx}\right] = -2x^2$$

$$\left[A, B\right] = \left[x^2, x\frac{d}{dx}\right] = -2A$$

★ $[A, B] = -[B, A]$

$$[B, A] = 2A$$

YÜKSEK MERTEBEDEN TÜREV

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{dx}{dt} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{dx}{dt}\right)}{\Delta t}$$

ÖRN: $x = t^3$ ise $\dfrac{dx}{dt} = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{(t+\Delta t)^3 - t^3}{\Delta t} \cong 3t^2$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{3(t+\Delta t)^2 - 3t^2}{\Delta t} \cong 6t$$

ÖRN: $x = 2\sin(t^2+1)$ $\qquad \dfrac{d^2x}{dt^2} = ?$

$$\frac{dx}{dt} = 2.\ 2t\cdot\cos(t^2+1) = 4t\cdot\cos(t^2+1)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 4\cdot\cos(t^2+1) - 4t\cdot 2t\cdot\sin(t^2+1) = 4\cos(t^2+1) - 8t^2\cdot\sin(t^2+1)$$

ÖRN: $x = 2\sin 4t$ $\qquad \ddot{x} = ?$

$$\omega = 4 \qquad \frac{2\pi}{T} = 4 \qquad T = \pi/2 \qquad A = 2$$

$$\frac{dx}{dt} = 8\cos 4t \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -32\sin 4t = -16x$$

$$\ddot{x} + 16x = 0$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad \text{(titreşim hareketi)}$$

★ $\ddot{x} + 8x = 0$ $\quad w^2 = 8$

$w = 2\sqrt{2} \quad 2\pi f = 2\sqrt{2} \quad f = \frac{\sqrt{2}}{\pi}$

ÖRN: $x = t\sin 2t \quad \frac{d^3x}{dt^3} = ?$

$$\frac{dx}{dt} = \sin 2t + t.2.\cos 2t = \sin 2t + 2t.\cos 2t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\cos 2t + (2.\cos 2t - 2t.2.\sin 2t) = 2\cos 2t + 2\cos 2t - 4t.\sin 2t$$
$$= 4\cos 2t - 4t.\sin 2t$$

$$\frac{d^3x}{dt^3} = -8\sin 2t - (4.\sin 2t + 4t.2.\cos 2t)$$
$$= -8\sin 2t - 4.\sin 2t - 8t.\cos 2t = -12\sin 2t - 8t.\cos 2t$$

İvme: $a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \quad a = \frac{dv}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{(v + \Delta v) - v}{\Delta t} \Rightarrow a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

ÖRN: $x = t^2$ ise bu hareketin $a = ?$

$v = \frac{dx}{dt} = 2t \quad a = \frac{dv}{dt} = 2$ sbt ivmeli bir hareket

ÖRN: $x = 2\cos 3t \quad a = ?$

$\dot{x} = -6\sin 3t$

$\ddot{x} = -18\cos 3t \Rightarrow \ddot{x} + 18\cos 3t = 0$

$\ddot{x} + 9x = 0$

— Teğet ve Normal Denklemi —

$\tan\alpha = \frac{dx}{dt} \quad m = \frac{dx}{dt}\Big|_p$

ÖRN: $x = 2t^3 + t^2 + 9$ $t = 2$ deki teğet denk. bulunuz.

$x = 2.2^3 + 2^2 + 9 = 29 \quad P(2, 29)$

$x - x_0 = m(t - t_0) \quad \frac{dx}{dt} = 6t^2 + 2t = 6.2^2 + 2.2 = 28 = m$

$x - 29 = 28(t - 2)$

$x - 29 = 28t - 56$

$x = 28t - 31$

ÖRN: $y=\sqrt[3]{x^2+1}$ $x=0$ nokt. teğet denkl. bulunuz.

$y=\sqrt[3]{0+1}=1$ $P(0,1)$

$y'=\frac{1}{3}(x^2+1)^{-\frac{2}{3}}\cdot 2x=m=\frac{1}{3}(0^2+1)^{-\frac{2}{3}}\cdot 2.0=0=m$

$y-y_0=m(x-x_0) \Rightarrow y-1=0 \Rightarrow y=1$ doğrusu (teğet denk)

NORMAL DENKLEMİ: $m\cdot m'=-1$
$m'=-\frac{1}{m}=-\frac{1}{0}=-\infty$

$x=0$ doğrusu olur.

— Parametrik Denklemlerin Türevleri —

$x=x(t)$ $y=y(t)$ $\frac{dy}{dx}=?$ $\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$

ÖRN: $x=\sqrt{t^2+1}$
$y=\frac{1}{t^3-1}$ $\frac{dy}{dx}=?$

$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{\cancel{2}}\cdot(t^2+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot\cancel{2}t=\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$

$\frac{dy}{dt}=\frac{0-(3t^2)}{(t^3-1)^2}=\frac{-3t^2}{(t^3-1)^2}$ $\frac{dy}{dx}=\frac{-\frac{3t^2}{(t^3-1)^2}}{\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}}$

$\frac{dy}{dx}=-\frac{3t^2}{(t^3-1)^2}\cdot\frac{\sqrt{t^2+1}}{\cancel{t}}=-\frac{3t\sqrt{t^2+1}}{(t^3-1)^2}$

ÖRN: $x=2\cos(\theta^2+1)$
$y=4[1+\sin^3\theta]$ $dy/dx=?$

$\frac{dx}{d\theta}=-2\cdot2\theta\cdot\sin(\theta^2+1)=-4\theta\cdot\sin(\theta^2+1)$

$\frac{dy}{d\theta}=4\cdot3\cdot\sin^2\theta\cdot\cos\theta=12\cdot\sin^2\theta\cdot\cos\theta$

$\frac{dy}{dx}=\frac{12\cdot\sin^2\theta\cdot\cos\theta}{-4\theta\cdot\sin(\theta^2+1)}=-\frac{3\sin^2\theta\cdot\cos\theta}{\theta\cdot\sin(\theta^2+1)}$

KAPALI FONKSİYONLARIN TÜREVİ —

$F(x,y)=c$ formatında olan fonksiyona kapalı fonk. dır.

$x^2+y^2=16$ fonksiyonu kapalı bir fonksiyon olup yarıçapı 4 olan çemberi gösterir. Buna benzer veya daha da karmaşık kapalı fonksiyonlar olabilir. Bu fonksiyon özellikle verilen bir noktadaki teğet ve normal denklemlerini bulabilmek için türevlerini bulmamız gerekir.

ÖRN: $x^2+y^2=16$ kapalı fonksiyonunun $x=2$ noktasındaki teğet ve normal denklemlerini bulunuz.

$$y^2=y^2(x)=[y(x)]^2=2y'(x)\cdot y(x)$$

$$x^2+y^2=16 \implies 2x+2y'\cdot y=0 \implies y'=-\frac{x}{y} \text{ dur.}$$

$x=2$ için $\quad 4+y^2=16 \quad y^2=12 \quad y=\mp 2\sqrt{3}$

$$m_1=-\frac{x}{y}=-\frac{2}{2\sqrt{3}}=-\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad m_2=-\frac{x}{y}=-\frac{2}{-2\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ bulunur.}$$

m_1 için teğet ve normal denklemleri;

$$y-y_1=m_1(x-x_1) \implies y-2\sqrt{3}=-\frac{1}{\sqrt{3}}(x-2) \text{ teğet denklemi}$$

$$m_1\cdot m_1'=-1 \quad m_1'=-\frac{1}{m_1}=-\frac{1}{-\frac{1}{\sqrt{3}}}=\sqrt{3}$$

$$y-y_1=m_1'(x-x_1) \implies y-2\sqrt{3}=\sqrt{3}(x-2) \text{ normal denklemi}$$

m_2 için teğet ve normal denklemleri;

$$y-y_2=m_2(x-x_1) \implies y+2\sqrt{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}(x-2) \text{ teğet denklemi}$$

$$m_2\cdot m_2'=-1 \quad m_2'=-\frac{1}{m_2}=-\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}}=-\sqrt{3}$$

$$y-y_2=m_2'(x-x_1) \implies y+2\sqrt{3}=-\sqrt{3}(x-2) \text{ normal denklemi}$$

ÖRN! $x^4+y^4=\cos^2(x^2+y^2)$ kapalı fonks. için $\frac{dy}{dx}=?$

$$4x^3+4y'\cdot y^3=-2\cos(x^2+y^2)\cdot(2x+2y'\cdot y)\cdot\sin(x^2+y^2)$$

$$4x^3+4y'\cdot y^3=-(2x+2y'\cdot y)\cdot\sin 2(x^2+y^2)$$

$$4x^3+4y'\cdot y^3=-2x\cdot\sin 2(x^2+y^2)-2y'\cdot y\cdot\sin 2(x^2+y^2)$$

$$4y'\cdot y^3+2y'\cdot y\cdot\sin 2(x^2+y^2)=-2x\cdot\sin 2(x^2+y^2)-4x^3$$

$$y'\left(4y^3+2y\cdot\sin 2(x^2+y^2)\right)=-\left[2x\cdot\sin 2(x^2+y^2)+4x^3\right]$$

$$y'=\frac{-\left[2x\cdot\sin 2(x^2+y^2)+4x^3\right]}{4y^3+2y\cdot\sin 2(x^2+y^2)}$$

ÖRN: $\sqrt{x^2+y^2}=\sin xy \qquad y'=?$

$$\frac{1}{2}\cdot(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(2x+2\cdot y'\cdot y)=(y+xy')\cdot\cos xy$$

$$\frac{x+y\cdot y'}{\sqrt{x^2+y^2}}=y\cdot\cos xy+xy'\cdot\cos xy$$

$$x+y\cdot y'=\sqrt{x^2+y^2}\cdot y\cdot\cos xy+\sqrt{x^2+y^2}\cdot xy'\cdot\cos xy$$

$$y\cdot y'-\sqrt{x^2+y^2}\cdot xy'\cdot\cos xy=\sqrt{x^2+y^2}\cdot y\cdot\cos xy-x$$

$$y'\left(y-\sqrt{x^2+y^2}\cdot x\cdot\cos xy\right)=\sqrt{x^2+y^2}\cdot y\cdot\cos xy-x$$

$$y'=\frac{\sqrt{x^2+y^2}\cdot y\cdot\cos xy-x}{y-\sqrt{x^2+y^2}\cdot x\cdot\cos xy}$$

ÖRN: $x^3y+xy^3=2$ kapalı eğrisini $P(1,1)$ noktasındaki teğet ve normal denklemlerini bulunuz.

$$3x^2\cdot y+x^3\cdot y'+y^3+x\cdot 3y'\cdot y^2=0$$

$$x^3\cdot y'+3y'\cdot y^2\cdot x=-3x^2\cdot y-y^3$$

$$y'(x^3+3y^2x)=-3x^2y-y^3$$

$$y'=\frac{-3x^2y-y^3}{x^3+3y^2\cdot x}=\frac{-3\cdot 1^2\cdot 1-1^3}{1^3+3\cdot 1^2\cdot 1}=\frac{-4}{4}=-1=m$$

$$m\cdot m'=-1\Rightarrow m'=\frac{-1}{m}=-\frac{1}{-1}=+1$$

$m=-1$ için teğet denklemi

$$y-y_0=m(x-x_0)$$

$$y-1=-1(x-1)$$

$$y-1=1-x$$

$$y=2-x$$

$m'=1$ için normal denklemi

$$y-y_0=m'(x-x_0)$$

$$y-1=1(x-1)$$

$$y-1=x-1$$

$$y=x$$

ÖRN: $\sqrt{xy+\cos xy} = x$ ise $\frac{dy}{dx} = ?$

$$\frac{1}{2} \cdot (xy+\cos xy)^{-\frac{1}{2}} \cdot (y + x \cdot y' - (y+xy') \cdot \sin xy) = 1$$

$$\frac{y + xy' - y \cdot \sin xy - xy' \cdot \sin xy}{2\sqrt{xy+\cos xy}} = 1$$

$$y + xy' - y \cdot \sin xy - xy' \cdot \sin xy = 2\sqrt{xy+\cos xy}$$

$$y'(x - x \cdot \sin xy) = 2\sqrt{xy+\cos xy} - y + y \cdot \sin xy$$

$$y' = \frac{2\sqrt{xy+\cos xy} - y + y \cdot \sin xy}{x - x \cdot \sin xy}$$

TERS FONKSİYONLAR

$f(x) = y \Rightarrow x = f^{-1}(y)$

ÖRN: $y = \frac{2x+1}{x-1} \Rightarrow f^{-1}(x) = ?$

$$yx - 2y = 2x + 1 \Rightarrow yx - 2x = 1 + 2y$$

$$x(y-2) = 1+2y$$

$$x = \frac{1+2y}{y-2}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1+2x}{x-2}$$

ÖRN: $y = \frac{x+1}{x-2} \Rightarrow f^{-1}(x) = ?$

$$yx - 2y = x + 1 \Rightarrow yx - x = 1 + 2y$$

$$x(y-1) = 1+2y \Rightarrow x = \frac{1+2y}{y-1}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1+2x}{x-1}$$

ÖRN: $y = \frac{3x+2}{x-1} \Rightarrow f^{-1}(x) = ?$

$$yx - y = 3x + 2 \Rightarrow yx - 3x = 2 + y \Rightarrow x(y-3) = 2+y$$

$$x = \frac{2+y}{y-3}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{2+x}{x-3}$$

— Ters Trigonometrik Fonksiyonlar —

★ $y = \sin x \Rightarrow x = \sin^{-1} y$

$y = f^{-1}(x) = \sin^{-1} x = \arcsin x$

$\Rightarrow$ Türevi : $y = \arcsin u(x)$

$\sin y = u(x) \longrightarrow y' \cdot \cos y = u'(x)$

$y' = \dfrac{u'(x)}{\cos y}$

$\sin^2 y + \cos^2 y = 1$

$\cos^2 y = 1 - \sin^2 y$

$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$

$y' = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$

$(\sin y = u(x))$

ÖRN: $y = \arc^3\sin(x^2 + x + 2) \quad y' = ?$

$y' = 3 \cdot \arc^2\sin(x^2+x+2) \cdot \dfrac{2x+1}{\sqrt{1-(x^2+x+2)^2}}$

$y' = \dfrac{(6x+3) \cdot \arc^2\sin(x^2+x+2)}{\sqrt{1-(x^2+x+2)^2}}$

ÖRN: $y = \arcsin(\cos 2x^2 + 3x^3 + 4x) \quad y' = ?$

$y' = \dfrac{-4x \cdot \sin 2x^2 + 9x^2 + 4}{\sqrt{1-(\cos 2x^2 + 3x^3 + 4x)^2}}$

★ $y = \cos x \Rightarrow y = f^{-1}(x) = \cos^{-1} x = \arccos x$

$\Rightarrow$ TÜREVİ : $y = \arccos u(x) \rightarrow \cos y = u(x)$

$-y' \cdot \sin y = u'(x) \Rightarrow y' = -\dfrac{u'(x)}{\sin y}$

$\cos^2 y + \sin^2 y = 1$

$\sin y = \sqrt{1 - \cos^2 y}$

$y' = -\dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-\cos^2 y}}$

$y' = -\dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$

$u(x) = \cos y$

ÖRN: $y = \arccos^2\left(\frac{x}{x+1}\right)$ $\qquad y' = ?$

$$y' = -2\arccos\left(\frac{x}{x+1}\right) \cdot \frac{\frac{(x+1)-x}{(x+1)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{x+1}\right)^2}}$$

$$y' = \frac{-2 \cdot \arccos\left(\frac{x}{x+1}\right)}{(x+1)^2 \cdot \sqrt{1-\left(\frac{x}{x+1}\right)^2}}$$

★ $y = \tan x \quad \Longrightarrow \quad y = f^{-1}(x) = \tan^{-1}(x) = \arctan x$

$\Rightarrow$ TÜREVİ : $\tan y = u(x) \quad \rightarrow \quad y' \cdot \frac{1}{\cos^2 y} = u'(x)$

$\sin^2 y + \cos^2 y = 1$

$\frac{\sin^2 y + \cos^2 y}{\cos^2 y} = \frac{1}{\cos^2 y}$

$\frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \tan^2 y$

$y' = \frac{u'(x)}{1+\tan^2 y}$

$y' = \frac{u'(x)}{1+u^2(x)}$

ÖRN! $y = \arctan(1+\sin^2 x) \qquad y' = ?$

$$y' = \frac{2 \cdot \sin x \cdot \cos x}{1+(1+\sin^2 x)^2} = \frac{\sin 2x}{1+(1+\sin^2 x)^2}$$

★ $y = \cot x \quad \Rightarrow \quad y = f^{-1}(x) = \cot^{-1}(x) = \operatorname{arccot} x.$

$\Rightarrow$ Türevi : $y = \operatorname{arccot} u(x) \quad \rightarrow \quad \cot y = u(x)$

$-y' \cdot \frac{1}{\sin^2 y} = u'(x) \qquad\qquad \sin^2 y + \cos^2 y = 1$

$y' \cdot (1+\cot^2 y) = u'(x) \qquad\qquad \frac{\sin^2 y + \cos^2 y}{\sin^2 y} = \frac{1}{\sin^2 y}$

$y' = -\frac{u'(x)}{(1+\cot^2 y)} \qquad\qquad \frac{1}{\sin^2 y} = 1+\cot^2 y$

$y' = -\frac{u'(x)}{1+u^2(x)}$

ÖRN: $y = x \cdot \arctan(x^3+1) \quad y' = ?$

$$y' = \arctan(x^3+1) + x \cdot \frac{3x^2}{1+(x^3+1)^2}$$

$$y' = \arctan(x^3+1) + \frac{3x^3}{1+(x^3+1)^2}$$

ÖRN: $y = \dfrac{1+\arcsin^2(x^2+1)}{1+\cos^2 x} \rightarrow y' = ?$

$$y' = \frac{2 \cdot \arcsin(x^2+1) \cdot \frac{2x}{\sqrt{1-(x^2+1)^2}} \cdot (1+\cos^2 x) + (1+\arcsin^2(x^2+1)) \cdot (2 \cdot \cos x \cdot \sin x)}{(1+\cos^2 x)^2}$$

$$y' = \frac{\frac{4x \cdot \arcsin(x^2+1) \cdot (1+\cos^2 x)}{\sqrt{1-(x^2+1)^2}} + (1+\arcsin^2(x^2+1)) \cdot \sin 2x}{(1+\cos^2 x)^2}$$

ÖRN: $\arctan^2 y = xy \quad y = y(x) \rightarrow y' = ?$

$$2 \cdot \arctan y \cdot \frac{y'}{1+y^2} = y + x \cdot y' \rightarrow 2 \cdot \arctan y \cdot y' = (y + x \cdot y') \cdot (1+y^2)$$

$$2y' \cdot \arctan y = y + y^3 + x \cdot y' + x \cdot y' \cdot y^2$$

$$y' \cdot (2\arctan y - xy^2 - x) = y + y^3$$

$$y' = \frac{y+y^3}{2\arctan y - xy^3 - x}$$

ÖRN: $\arcsin xy = x^2 + y^2 \quad y' = ?$

$$\frac{y + x \cdot y'}{\sqrt{1-(xy)^2}} = 2x + 2 \cdot y' \cdot y \rightarrow y + xy' = (2x + 2y \cdot y')(\sqrt{1-(xy)^2})$$

$$xy' - 2y \cdot y'(\sqrt{1-(xy)^2}) = 2x(\sqrt{1-(xy)^2}) - y$$

$$y'(x - 2y(\sqrt{1-(xy)^2})) = 2x(\sqrt{1-(xy)^2}) - y$$

$$y' = \frac{2x(\sqrt{1-(xy)^2}) - y}{x - 2y(\sqrt{1-(xy)^2})}$$

ÖRN: $\arctan(x^2+y^2) = \arcsin(xy) \qquad y' = ?$

$$\frac{2x+2y\cdot y'}{1+(x^2+y^2)^2} = \frac{y+x\cdot y'}{\sqrt{1-(xy)^2}} \Rightarrow (2x+2y\cdot y')(\sqrt{1-(xy)^2}) = (y+xy')\cdot(1+(x^2+y^2)^2)$$

$$\Rightarrow 2x\cdot\sqrt{1-(xy)^2} + 2yy'\cdot\sqrt{1-(xy)^2} = y(1+(x^2+y^2)^2) + xy'\cdot(1+(x^2+y^2)^2)$$

$$\Rightarrow 2x\cdot\sqrt{1-(xy)^2} + 2y\cdot y'\sqrt{1-(xy)^2} = y + y\cdot(x^2+y^2)^2 + xy' + xy'\cdot(x^2+y^2)^2$$

$$\Rightarrow 2y\cdot y'\cdot\sqrt{1-(xy)^2} - xy' - xy'\cdot(x^2+y^2)^2 = y + y\cdot(x^2+y^2)^2 - 2x\cdot\sqrt{1-(xy)^2}$$

$$\Rightarrow y'\,(2y\sqrt{1-(xy)^2} - x - x\cdot(x^2+y^2)^2) = y + y\cdot(x^2+y^2)^2 - 2x\cdot\sqrt{1-(xy)^2}$$

$$y' = \frac{y+y\cdot(x^2+y^2)^2 - 2x\cdot\sqrt{1-(xy)^2}}{2y\sqrt{1-(xy)^2} - x - x\cdot(x^2+y^2)^2}$$

ÖRN: $\arctan xy = x^2+y^2$ kapalı fonksiyonunun $x=0$ noktasında teğet denk. yazınız

$x=0$ için $\rightarrow \arctan 0 = y^2 \qquad \arctan 0 = a$

$\tan a = 0$

$0 = y^2 \rightarrow y = 0 \qquad a = 0$

$$P(0,0) \rightarrow \frac{y+x\cdot y'}{1+(xy)^2} = 2x + 2y\cdot y'$$

$x=0 \quad y=0$ için $\rightarrow \quad 0\cdot y' = 0\cdot y'$ olur

bu durumda denk. çözüm kümesi yoktur.

ÖRN: $y = \arctan^3 4x$ fonksiyonunun $x=\frac{1}{4}$ noktasındaki teğet ve normal denklemlerini yazınız.

$x=\frac{1}{4}$ için $\rightarrow y = \arctan^3 1$

$\arctan 1 = a$

$\tan a = 1 \rightarrow a = \frac{\pi}{4} \rightarrow y = \left(\frac{\pi}{4}\right)^3$

$$y' = 3\arctan^2 4x\cdot\frac{4}{1+16x^2} \rightarrow x=\frac{1}{4} \text{ için} \rightarrow \frac{12\cdot\arctan^2 1}{1+1} = 6\cdot\left(\frac{\pi}{4}\right)^2$$

$m = 6\cdot\left(\frac{\pi}{4}\right)^2$ teğet denklemi $\Rightarrow y - y_0 = m\cdot(x-x_0)$

$$y - \left(\frac{\pi}{4}\right)^3 = 6\left(\frac{\pi}{4}\right)^2\cdot\left(x-\frac{1}{4}\right)$$

$$m\cdot m' = -1 \rightarrow m' = -\frac{1}{m} \rightarrow m' = -\left(\frac{4}{\pi}\right)^2\cdot\frac{1}{6}$$

normal denklemi $\Rightarrow y - y_0 = m'\cdot(x-x_0)$

$$y - \left(\frac{\pi}{4}\right)^3 = -\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{4}{\pi}\right)^2\cdot\left(x-\frac{1}{4}\right)$$

ÖRN: $x^2+y^2=\arctan 2x$ kapalı fonksiyonunun $x=\frac{1}{2}$ için teğet ve normal denklerini yazınız.

$x=\frac{1}{2}$ için $\rightarrow$ $\frac{1}{4}+y^2=\arctan 1$

$\frac{1}{4}+y^2=\frac{\pi}{4} \rightarrow y_1=\frac{1}{2}\sqrt{\pi-1} \quad y_2=\frac{1}{2}\sqrt{\pi-1}$

$P_1\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\sqrt{\pi-1}\right)$, $P_2\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\sqrt{\pi-1}\right)$

$$2x+2y\cdot y'=\frac{2}{1+4x^2}$$

$\rightarrow$ 1. nokta için :

$1+\sqrt{\pi-1}\cdot y'=\frac{2}{2}$

$y'=0$

$\rightarrow$ teğet denklemi

$y-y_0=m(x-x_0)$

$y-\frac{1}{2}\sqrt{\pi-1}=0$

$\rightarrow$ normal denklemi

$y-y_0=m'\cdot(x-x_0)$

$y-\frac{1}{2}\sqrt{\pi-1}=0$

$\rightarrow$ 2. nokta için;

$1-\sqrt{\pi-1}\cdot y'=\frac{2}{2}$

$y'=0$

$\rightarrow$ teğet denklemi

$y-y_0=m(x-x_0)$

$y+\frac{1}{2}\sqrt{\pi-1}=0$

$\rightarrow$ normal denklemi

$y-y_0=m'(x-x_0)$

$y+\frac{1}{2}\sqrt{\pi-1}=0$

— ARTAN ve EKSİLEN FONKSİYONLAR —

$[a,b]$ $f(x)$'in aldığı işaret her ne kadar fonksiyonun artan ve eksilen olması halinde bize bilgi veriyorsa $f(x)$'in sıfır olduğu noktada ortaya çıkan belirsizliğin giderilmesi için türeve müracaat edilir. Türevin işareti fonksiyonun bu kırılmaya rağmen artan veya eksilen olması hakkında bize doğru bilgiyi verir.

ÖRN: $y=f(x)=2x-4$

$y'=2>0$ olduğu için bu aralıkta fonksiyon daima artan bir fonksiyondur.

ÖRN: Bir parçacık $V(x) = x^3 - x^2 + 6$ potansiyeli altındadır. Hareketin kararlı noktası ndr?

$$V'(x) = 3x^2 - 2x = 0 \rightarrow x(3x-2) = 0$$

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = 2/3$$

x	$-\infty$		0		$2/3$		$+\infty$
$V'(x)$		$+$ ↗	max	$-$ ↘	min	$+$ ↗	

$x = 0$ noktası kararsız noktadır.
$x = 2/3$ noktası kararlı 〃

ÖRN: Evrenin sahip olduğu potansiyel $V(x) = x^4 - x^2 - 6$ ile verilmektedir. Bu durumu inceleyiniz.

$$V'(x) = 4x^3 - 2x = 0 \rightarrow x(4x^2 - 2) = 0$$

$$x_1 = 0 \qquad 4x^2 - 2 = 0$$

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad x_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

x		$-1/\sqrt{2}$		0		$1/\sqrt{2}$	
$V'(x)$	$-$ ↘	min	$+$ ↗	max	$-$ ↘	min	$+$ ↗

ÖRN: Pozitif iki sayının toplamının 2 fazlası 18 ise bunların çarpımlarının iki fazlasının max olması için sayılar ne olmalıdır.

$$x + y + 2 = 18$$
$$x + y = 16 \qquad y = 16 - x$$

$$S_{max} = x \cdot y + 2 \rightarrow x \cdot (16 - x) + 2$$
$$16x - x^2 + 2$$

$$S' = 16 - 2x = 0$$
$$x = 8$$

x		8	
S'	$+$ ↗	max	$-$ ↘

$$x = 8 \qquad y = 8 \qquad S_{max} = xy + 2$$
$$= 8 \cdot 8 + 2 = 66$$

ÖRN: $y = \dfrac{x^2+1}{x^2+x+2}$ fonksiyonunun artan ve azalan olmasını inceleyiniz.

$$y' = \frac{2x \cdot (x^2 + x + 2) - (x^2+1) \cdot (2x+1)}{(x^2+x+2)^2}$$

$$y' = \frac{\cancel{2x^3} + 2x^2 + 4x - \cancel{2x^3} - x^2 - 2x - 1}{(x^2+x+2)^2} = \frac{x^2 + 2x - 1}{(x^2+x+2)^2}$$

$$y' = \frac{x^2+2x-1}{(x^2+x+2)^2} = 0 \Rightarrow x^2+2x-1=0$$

$$\Delta = b^2-4ac = 4-4\cdot(-1)\cdot 1 = 8$$

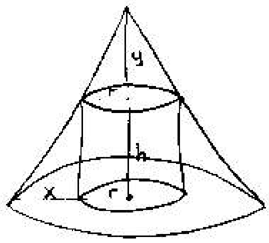
$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = -1+\sqrt{2} \qquad x_2 = -1-\sqrt{2}$$

$x^2+x+2=0 \Rightarrow \Delta = b^2-4ac$
$= 1-4\cdot 2\cdot 1 = -7 < 0$ olduğu için reel kökü yoktur.

x	$-\infty$	$-1-\sqrt{2}$		$-1+\sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
	↗	max	↘	min	↗

ÖRN! İçine yarıçapı r ve yüksekliği h olan bir dik dairesel silindir yerleştirilebilecek min hacimli dik dairesel koniyi bulunuz.



koninin hacmi $\Rightarrow V = \frac{1}{3}(x+r)^2 \cdot \pi \cdot (y+h)$

$$\frac{y+h}{y} = \frac{x+r}{r}$$

$$r(y+h) = y(x+r) \Rightarrow y = \frac{rh}{x}$$

$$V = \frac{1}{3}(x+r)^2\cdot\pi\cdot\left(\frac{rh}{x}+h\right) \Rightarrow \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot\frac{(x+r)^3\cdot h}{x}$$

$$V' = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot h\cdot\frac{3(x+r)^2\cdot x-(x+r)^3\cdot 1}{x^2} = 0$$

$$(x+r)^2\left[3x-(x+r)\right]=0 \Rightarrow (x+r)^2\left[2x-r\right]=0$$

$$x_1=-r \qquad x_2 = r/2$$

x		$-r$		$r/2$	
$V'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
	↘		↘	min	↗

$x = \frac{r}{2}$ için $y = \frac{rh}{x} = \frac{rh}{r/2} = 2h$

$$V = \frac{1}{3}\cdot\pi(x+r)^2\cdot(y+h) = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot\left(r+\frac{r}{2}\right)^2\cdot(2h+h)$$

$$= \frac{9r^2\cdot\pi\cdot h}{4}$$

— SONUÇLAR —

$y=f(x)$ eğer tanım aralığı iıcinde $f'(x)>0$ ise bu fonksiyon artan, $f'(x)<0$ ise bu fonksiyon azalan bir fonksiyondur. $f'(x)=0$ olduğu noktalar eğer tanım aralığı iıcindeyse extremum noktalarıdır. Eğer bu noktalar kırılma noktaları ise bunlar sanal (izafi) extremum gösterirler. Extremum noktalarının tiplerini saptıyabilmek için 2. türevlerine bakmak veya fonksiyonun cizimi isteniyorsa tablodan tayin edilir. Bu durumda 2. türevler alınır extremum noktaları için yani x_1 extremum noktası ise $f''(x_1)>0$ olduğu durumda bu nokta min eğer $f''(x_1)<0$ ise bu nokta max olur. Eğer bizden fonksiyonun konkav ceşitleri soruluyorsa 2. türevin kökleri bulunur işareti incelenir. Eğer $f''(x)>0$ ise fonksiyon yukarı konkav (içe dönük, kararlı, $\cup$ şeklinde gibi) Eğer $f''(x)<0$ ise fonksiyon bu aralıkta aşağı konkav (dışa dönük, kararsız, $\cap$ şeklindedir) $f''(x)>0$ noktalarına da fonksiyonun dönüm noktaları denir.

ÖRN: $y=x^2-x-6$ fonksiyonunun grafiğini cizinız.

1°) Tanım aralığı $\Rightarrow [-\infty, +\infty]$

2°) $\lim\limits_{x \to -\infty} y = \lim\limits_{x \to -\infty} x^2\left(1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}\right) = +\infty$ (limit durumu)

$$\lim_{x \to \infty} y = \lim_{x \to \infty} x^2\left(1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}\right) = +\infty$$

3°) Türev $\Rightarrow y' = 2x-1$ $\qquad 2x-1=0$, $x=\frac{1}{2}$

$$x=\frac{1}{2} \text{ için } y=\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}-6 = -\frac{29}{4}$$

$$M\left(\frac{1}{2}, -\frac{29}{4}\right)$$

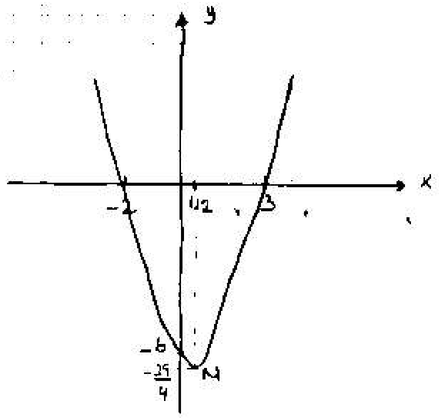
$y''=2>0$ olduğu için dönüm noktası yoktur

4°) özel noktalar $\Rightarrow$ $x=0 \quad y=-6$; $y=0 \quad x_1=3 \quad x_2=-2$

5°) Tablo

x	$-\infty$		-2		0		$1/2$		3		$+\infty$
y'		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
y''		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	-6	$\searrow$	$-\frac{29}{4}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

6°) Grafik



ÖRN: $y = x^3 - 27x$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

1°) tanım aralığı $\Rightarrow [-\infty, +\infty]$

2°) limit durumu $\Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} y = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3\left(1 - \frac{27}{x^2}\right) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to \infty} y = \lim\limits_{x \to \infty} x^3\left(1 - \frac{27}{x^2}\right) = \infty$

3°) türev $\rightarrow$ $y' = 3x^2 - 27 = 0$ $\quad 3x^2 = 27$

$x^2 = 9 \quad x_1 = 3 \quad x_2 = -3$

$x_1 = 3$ için $y = 3^3 - 27.3 = -54 \quad M_1(3, -54)$

$x_2 = -3$ için $y = (-3)^3 - 27.(-3) = 54 \quad M_2(-3, 54)$

$y'' = 6x = 0 \quad x = 0$

$x = 0$ için $y = 0 \quad D(0,0)$

M_1 değeri için $y''(.3) > 0$ M_1 min noktası

M_2 " " $y''(3) < 0$ M_2 max "

4°) özel noktalar $\Rightarrow$ $x = 0$ için $y = 0$

$y = 0$ " $\quad x^3 - 27x = 0$

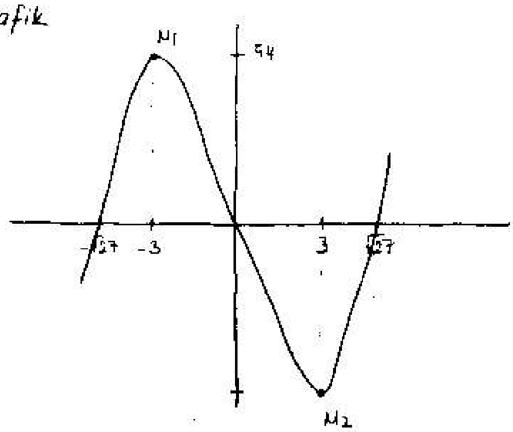
$x(x^2 - 27) = 0$

$x_1 = 0 \quad x_2 = \sqrt{27} \quad x_3 = -\sqrt{27}$

5°) Tablo

x	$-\infty$	$-\sqrt{27}$		-3		0		3		$\sqrt{27}$		$+\infty$
y'		+	+	0	−		−	0	+		+	
y''		−	−		−	0	+		+		+	
y	$-\infty$ ↗	0	↗	54 max	↘	0	↘	−54 min	↗	0	↗	$+\infty$

6°) Grafik



orjine, merkeze göre simetrik yani tek fonksiyon

ÖRN: $y = x^3$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

1°) tanım aralığı → $[-\infty, +\infty]$

2°) limit durumu → $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$ $\lim\limits_{x \to \infty} x^3 = \infty$

3°) türev → $y' = 3x^2 = 0$ $x = 0$ (çift kat kök).

$x = 0$ için $y = 0$ $M(0,0)$

$y'' = 6x = 0$ $x = 0$ $y = 0$ $D(0,0)$

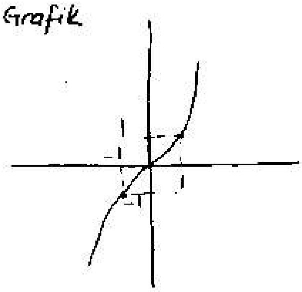
4°) özel noktalar → $x = 0$ $y = 0$; $y = 0$ $x = 0$

$x = 1$ $y = 1$
$x = -1$ $y = -1$

4°) Tablo

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	
y''		$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

6°) Grafik



ÖRN: $y = \dfrac{x+2}{x-3}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz

1°) tanım aralığı $\rightarrow [-\infty, +\infty]$ $x \neq 3$ hariç

2°) $\lim\limits_{x \to \mp\infty} y = 1$ yatay asimptot

$$\lim_{x\to 3^-} y = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{(3-\varepsilon)+2}{(3-\varepsilon)-3} = \lim_{\varepsilon^- \to 0} \frac{5-\varepsilon}{-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon^- \to 0}\left(1 - \frac{5}{\varepsilon}\right)$$
$$= 1 - \infty = -\infty$$

$$\lim_{x\to 3^+} y = \lim_{\varepsilon^+ \to 0} \frac{(3+\varepsilon)+2}{(3+\varepsilon)-3} = \lim_{\varepsilon^+ \to 0} \frac{5+\varepsilon}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon^+ \to 0}\left(1 + \frac{5}{\varepsilon}\right)$$
$$= 1 + \infty = \infty$$

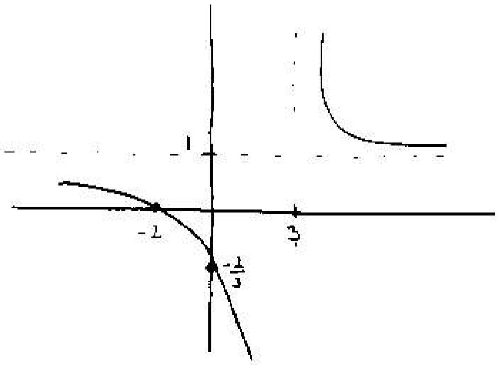
3°) $y' = \dfrac{(x-3)-(x+2)}{(x-3)^2} = -\dfrac{5}{(x-3)^2} < 0$ azalan fonksiyon

$y'' = \dfrac{5.2.(x-3)}{(x-3)^4} = \dfrac{10}{(x-3)^3} = 0$ $\quad x = 3$ fonksiyonun dönüm noktası

4°)

x	$-\infty$		-2		0		3		$+\infty$
y'		$-$		$-$		$-$	||	$-$	
y''		$-$		$-$		$-$	||	$+$	
y	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-2/3$	$\searrow -\infty$	|| $+\infty$	$\searrow$	1

6°)



ÖRN: $y=\frac{x^2}{x^2-1}$ fonksiyonun grafiğini çiziniz.

T.A $\Rightarrow$ $[-\infty , \infty]$ $x \neq \mp 1$ hariç

$\lim_{x\to\mp\infty} y = 1$ yatay asimptot

$\lim_{x\to 1^+} y = \lim_{\varepsilon^+\to 0}\frac{(1+\varepsilon)^2}{(1+\varepsilon)^2-1} = \lim_{\varepsilon^+\to 0}\frac{1+2\varepsilon+\varepsilon^2}{\varepsilon^2+2\varepsilon} = \infty$

$x^2-1=0$ $x=1$ ve $x=-1$ düşey asimptot

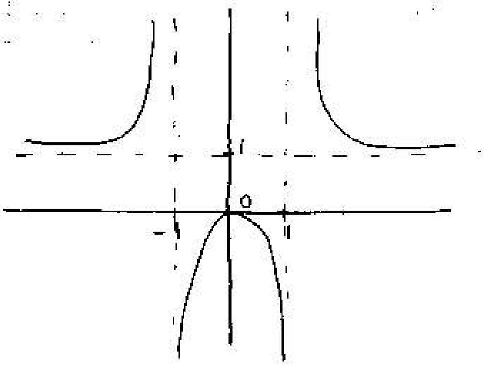
$y'=\frac{2x(x^2-1)-2x.(x^2)}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^3-2x-2x^3}{(x^2-1)^2} = -\frac{2x}{(x^2-1)^2}=0$

$x=0$ $M(0,0)$ ext. noktaları

$y''=\frac{-2(x^2-1)^2+2x.2.(x^2-1).2x}{(x^2-1)^4} = \frac{(x^2-1)[-2(x^2-1)+8x^2]}{(x^2-1)^4}=0$

$x=1$ ve $x=-1$ izafi dönüm noktaları

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		+	‖	+	0	−	‖	−	
y''		+	‖	−		−	‖	+	
y	1	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	0	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	1



ÖRN: $y = \frac{x^2}{x^2+1}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

T.A $\Rightarrow [-\infty, +\infty]$ kırılma yok

$\lim_{x \to \mp\infty} y = 1$ yatay asimptot düşey asimptot yok

$y' = \frac{2x(x^2+1) - 2x(x^2)}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2} = 0 \quad x = 0 \quad M(0,0)$ ext. noktaları

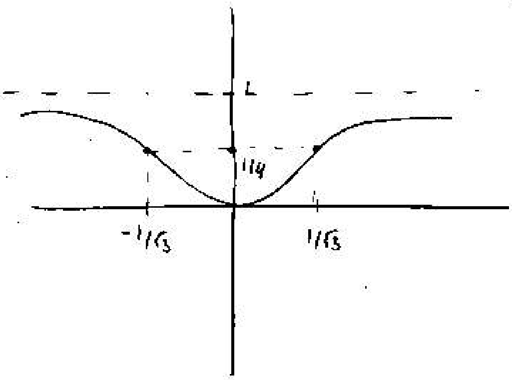
$y'' = \frac{2(x^2+1)^2 - 2(x^2+1) \cdot 2x \cdot 2x}{(x^2+1)^4} = \frac{(x^2+1)[2(x^2+1) - 8x^2]}{(x^2+1)^4} = 0$

$x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad x_2 = \frac{-1}{\sqrt{3}}$

$x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ için $y_1 = \frac{1}{4}$ $D_1\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{4}\right)$

$x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ " $y_2 = \frac{1}{4}$ $D_2\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{4}\right)$

x	$-\infty$		$-1/\sqrt{3}$		0		$1/\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
y''		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
y	1	$\searrow$	$1/4$	$\searrow$	0 min	$\nearrow$	$1/4$	$\nearrow$	1



FONKSİYONLARIN SİMETRİ ÖZELLİĞİ

1) Eğer bir fonksiyonda $f(x) = f(-x)$ özelliği varsa bu fonksiyon y eksenine göre simetriktir ve bu fonksiyona çift fonksiyon denir.

Örn: $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^2+1} = \frac{x^2}{x^2+1} = f(x)$$ çift fonk.

Örn: $f(x) = \cos 2x$ $\quad f(-x) = \cos 2(-x) = \cos 2x = f(x)$ çift fonk

2) Eğer bir fonksiyonda $f(x) = -f(-x)$ ise bu fonksiyon orjine göre simetriktir. Bu özelliğe sahip fonksiyona tek fonksiyon dnr.

Örn: $y = x^3 - x$. $\quad f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -f(-x)$ tek fonk.

Örn: $y = \sin x$ $\quad f(-x) = \sin(-x) = -\sin x$ tek fonk

_ SONUÇLAR —

⇒ $f(x) = x^2 . \cos x$

$f(-x) = (-x)^2 . \cos(-x) = x^2 . \cos x = f(x)$ çift fonk

⇒ $f(x) = x . \cos x$ $\quad f(-x) = (-x) . \cos(-x) = -x\cos x = -f(x)$ tek fonk.

⇒ $f(x) = x . \sin x$ $\quad f(-x) = -x . \sin(-x) = x . \sin x = f(x)$ çift fonk

⇒ $f(x) = \tan x$ çift fonk.

ÖRN: $y = \dfrac{x}{x^2-1}$ fonksiyonunun düşey ve yatay asimptotlarını bulunuz.

$$\lim_{x \to \mp\infty} y = \lim_{x \to \mp\infty} \frac{x}{x^2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} = 0$$

yatay asimptotu yoktur.

$x^2 - 1 = 0$ $\quad x_1 = 1$ $\quad x_2 = -1$ düşey asimptotlar

NOT: Payın mertebesi paydadan küçük olduğunda yatay asimptot yoktur.

ÖRNEK $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ fonksiyonunun asimptotlarını bulunuz.

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 \cdot x}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} y = \infty$$ yatay asimptot yok

$x^2-1=0 \quad x_1=1 \quad x_2=-1$ düşey asimptotlar

Bu durumlarda eğik asimptot vardır. Genel olarak eğik asimptotu analiz II'de üstel ve logaritmik fonksiyonları incelerken ele alacağız.

— FİNAL ÖNCESİ QUİZ SORULARI —

1. $xy = \sin y$ kapalı fonksiyonunun $y=\frac{\pi}{2}$ noktasındaki teğet ve normal denklemlerini yazınız.

$y=\frac{\pi}{2}$ için $\Rightarrow x\cdot\frac{\pi}{2} = \sin\frac{\pi}{2} \Rightarrow x\cdot\frac{\pi}{2} = 1$

$\Rightarrow x = \frac{2}{\pi} \qquad P\left(\frac{2}{\pi}, \frac{\pi}{2}\right)$

$y + x\cdot y' = y'\cdot\cos y \Rightarrow y = y'\cdot\cos y - xy'$

$$y' = \frac{y}{\cos y - x}$$

$P\left(\frac{2}{\pi}, \frac{\pi}{2}\right)$ için $\Rightarrow y' = \dfrac{\pi/2}{\cos\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}} = -\dfrac{\pi^2}{4} = m$

teğet denklemi; $y - y_0 = m(x - x_0)$

$$y - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi^2}{4}\left(x - \frac{2}{\pi}\right) \Rightarrow y = -\frac{\pi^2}{4}x + \pi$$

normal denklemi; $m\cdot m' = -1 \Rightarrow m' = \dfrac{-1}{m} = \dfrac{4}{\pi^2}$

$$y - y_0 = m'(x - x_0) \Rightarrow y - \frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi^2}\left(x - \frac{2}{\pi}\right)$$

$$y = \frac{4}{\pi^2}x + \frac{\pi^4 - 16}{2\pi^3}$$

2. $x = \sin 2t$, $y = \arctan t^2$ parametrik denklemleri veriliyor;

a. $t=1$ için $d^2y/dx^2 = ?$

b. $\vec{a} = \dfrac{d^2x}{dt}\vec{i} + \dfrac{d^2y}{dt}\vec{j} \Rightarrow |\vec{a}| = ?$

a. $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$

$\frac{dy}{dt} = \frac{2t}{1+t^4}$ $\quad \frac{dx}{dt} = 2 \cdot \cos 2t$

$\frac{dy}{dx} = \frac{t}{(1+t^4) \cdot \cos 2t}$

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dt}{dx} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx/dt}$

$= \frac{\sin 2 - \cos 2}{2\cos^3 2}$

b. $|\vec{a}| = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}$

$= \sqrt{(-4 \cdot \sin 2t)^2 + \left(\frac{2(1+t^4) - 2t \cdot 4t^3}{(1+t^4)^2}\right)^2}$

$t = 1$ için;

$|\vec{a}| = \sqrt{(-4 \cdot \sin 2)^2 + 1}$

3. $f(x) = x \cdot \sin 2x$ a. fonksiyonunun simetri özelliğini inceleyiniz.

$f(-x) = (-x) \cdot \sin 2(-x) = x \cdot \sin 2x$ çift fonksiyon
y eksenine göre simetri

$\sin(-2x) = \sin(0 - 2x) = \sin 0 \cdot \cos 2x - \sin 2x \cdot \cos 0$
$= -\sin 2x$

b. $f(x) = x \cdot \sin 2x \rightarrow A = x\frac{d}{dx}$ $\quad A^2 f(x) = ?$

$A^2 f(x) = x\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}f(x)\right) = x\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}(x \cdot \sin 2x)\right)$

$= x\frac{d}{dx}\left(x\left[\sin 2x + 2x \cdot \cos 2x\right]\right) = x\frac{d}{dx}\left(x \cdot \sin 2x + 2x^2 \cdot \cos 2x\right)$

$= x\left(\sin 2x + 2x \cdot \cos 2x + 4x \cdot \cos 2x - 2x^2 \cdot 2\sin 2x\right)$

$= x \cdot \sin 2x + 2x^2 \cdot \cos 2x + 4x^2 \cdot \cos 2x - 4x^3 \cdot \sin 2x$

4. m kütleli bir parçacık $V(x) = (ab+4)x$ potansiyeli altındadır. $\left(F = -\frac{dV}{dx}\right)$ $a+b=12$ ise F'in min olduğu değerde a ve b ne olur?

$$F = -\frac{dV}{dx} = -(ab+4) \qquad a+b=12$$
$$b = 12-a$$

$$F = -[a(12-a)+4] = -[12a - a^2 + 4] = a^2 - 12a - 4$$

$$F' = 2a - 12 = 0 \quad a = 6$$

$$F'' = 2 > 0 \quad \text{min} \quad a=6 \quad b=6$$

5. a. $y = \frac{x-1}{ax^2-4}$ eğrisinin $x=1$ noktasındaki teğetinin eğiminin $1/2$ olması için, $a = ?$

$$y' = \frac{(ax^2-4) - (x-1).2ax}{(ax^2-4)^2} \rightarrow x=1 \text{ için } \frac{a-4}{(a-4)^2} = \frac{1}{2}$$

$$\underline{\underline{a = 6}}$$

b. $y = \frac{x}{x^2+3x+2}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

$T.A = [-\infty, \infty]$ $x \neq -2$ $x \neq -1$

Düşey asimptot $\Rightarrow$ $x=-2$ $x=-1$

yatay asimptot $\rightarrow$ $\lim\limits_{x \to \mp\infty} \frac{x}{x^2\left(1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)} = 0$

Özel noktalar $\rightarrow$ $x=0$, $y=0$ $\quad$ $y=0$, $x=0$

$$y' = \frac{(x^2+3x+2) - x(2x+3)}{(x^2+3x+2)^2}$$

$$= \frac{x^2+3x+2-2x^2-3x}{(x^2+3x+2)^2} = \frac{-x^2+2}{(x^2+3x+2)^2} = 0$$

$$x_1 = \sqrt{2} \quad x_2 = -\sqrt{2}$$

x	$-\infty$		-2		$-\sqrt{2}$		-1		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$		$+$	0	$-$	
y	0	↘	D.A	↘	y_2 min	↗	D.A	↗		↗	y_1 max	↘	0