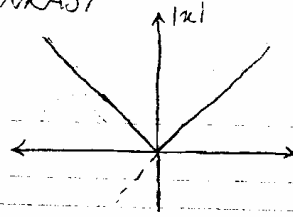


* ANALİZ I *

MUTLAK DEĞER VE SONRASI

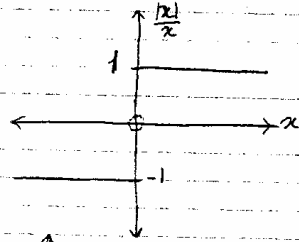
①

$$\ddot{\text{Ö}} \quad x \in \mathbb{R} \\ |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} \Rightarrow$$



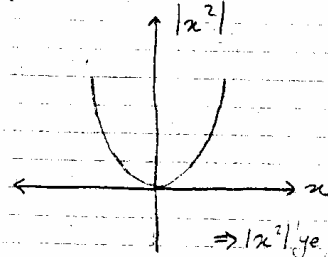
$\Rightarrow |x|$ 'e göre simetrik

$$\ddot{\text{Ö}} \quad \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$



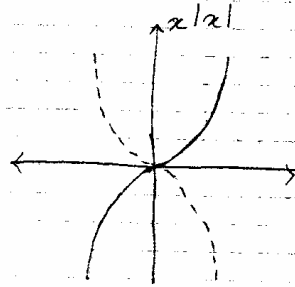
$\Rightarrow$ orijine göre simetrik

$$\ddot{\text{Ö}} \quad |x^2| = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ x^2 & x < 0 \end{cases}$$

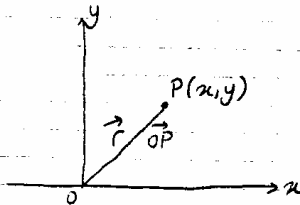


$\Rightarrow |x^2|$ 'ye göre simetrik

$$\ddot{\text{Ö}} \quad y = x/|x| = \begin{cases} x^2 & x > 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases} \Rightarrow$$



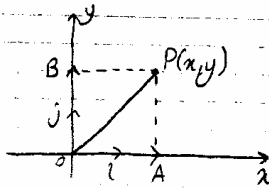
②



$$|\vec{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$\vec{OP} = \vec{r} \Rightarrow P$ noktasının yer vektörü

$$|\vec{OP}| = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2} = r$$



$$\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{AP}$$

$$\alpha \vec{A} = \vec{D}$$

$$\vec{OA} = x\vec{i}$$

$$\vec{OB} = y\vec{j} \Rightarrow |\vec{j}| = 1$$

$$\vec{OP} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

●

! NCT: Boyu bir olan vektöre birim vektör denir.

$$\vec{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} = r\vec{u}$$

$$|\vec{OP}| = (x\vec{i} + y\vec{j}) \cdot (x\vec{i} + y\vec{j}) = x^2 + y^2$$

$$(x\vec{i} \cdot x\vec{i}) + (x\vec{i} \cdot y\vec{j}) + (y\vec{j} \cdot x\vec{i}) + (y\vec{j} \cdot y\vec{j})$$

$$(x\vec{i} \cdot x\vec{i}) = x^2, \vec{i} \cdot \vec{i} = 1$$

$$(x\vec{i} \cdot y\vec{j}) = xy(\underbrace{\vec{i} \cdot \vec{j}}_0) = 0 \quad \begin{matrix} j \cdot i = 0 \\ j \cdot j = 1 \end{matrix}$$

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = |\vec{i}| |\vec{i}| \cos 0 = |\vec{i}| \cdot |\vec{i}| \cos 0 = 1$$

aralarındaki açı

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \theta //$$

$$j \cdot j = 1$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = |\vec{i}| |\vec{j}| \cos 90 = 0$$

aralarındaki açı

$$|\vec{OP}| = \sqrt{(x\vec{i} + y\vec{j})^2} =$$

$$|\vec{r}| = |\vec{OP}| = \sqrt{r^2} = \sqrt{r \cdot r} = r$$

SONUÇLAR

1. $|x| \gg x$

2. $|xy| = |x| \cdot |y|$

3. $|x| = \sqrt{x^2} \Rightarrow \text{Örnek } |-1| = \sqrt{(-1)^2} = 1$

$$|-x| = |(-1) \cdot (x)| = |-1| |x| = 1 |x| = |x| = \sqrt{x^2}$$

4. $|x-y| = |y-x| \quad |\vec{A}-\vec{B}| = |\vec{B}-\vec{A}|$

5. $x \neq 0 \quad \left| \frac{1}{x} \right| = \frac{1}{|x|}$

6. $\left| \frac{x}{y} \right| = \left| x \cdot \frac{1}{y} \right| = |x| \cdot \left| \frac{1}{y} \right| = |x| \cdot \frac{1}{|y|} = \frac{|x|}{|y|}$

* $ax^2 + bx + c = 0$

$x_1, x_2 \rightarrow$ gerçekt olabilir

$x_1 = x_2 \rightarrow$ eşit "

$x_1, x_2 \rightarrow$ farklı "

$$* ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

$$x_1, x_2, x_3$$

- - en az bir gerçektir. Çünkü katsayıları reel olan polinomların sanal kökleri ortaya eşlenit olacak şekilde diğer bir kökle ortaya çıkar.
 - üçü de eşit olabilir.
 - ikisi gerçektir olabilir.

$$* ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

- x_1, x_2, x_3, x_4
 - dördü de sanal olabilir.
 - ikisi gerçektir, ikisi sanal olabilir.
 - herbiri gerçektir olabilir.
 - dördü de eşit olabilir.

* Birinci derece polinomda işaret köke kadar x 'in katsayısının tersi olur.

• $\begin{cases} x-a > 0 \\ x-a = 0 \\ x-a \end{cases} \Rightarrow$

• (a) $(x-2)(x+4) > 0$

$$x-2=0 \Rightarrow x_1=2$$

$$x+4=0 \Rightarrow x_2=-4$$

		-4		2	
$x-2$	-		-	0	+
$x+4$	-	0	+		+
$(x-2)(x+4)$	+		-		+

Çözüm Çözüm

* Eğer kökler gerçektir ve birbirinden farklı ise kökler arasının işareti a 'nın işaretinin tersidir.

• $x^2 - 3x - 1 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 9 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 13$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2} \approx \frac{-3 \pm 3,5}{2}$$

x		$\frac{-6,5}{2}$		$\frac{0,5}{2}$	
$x^2 - 3x - 1$	+	0	-	0	+

⑥ $x^2+4=0$
 $x^2=-4$
 $x_{1,2}=\pm\sqrt{-4} \Rightarrow$ Reel kök yok.

x	Yok
x^2+4	+

4

* $ax^2+bx+c=0$ denkleminin kökleri sanal ise işaret her yerde a'nın işaretine eşittir. Veya 2. derece için $\Delta < 0$ işaret her yerde a'nın işaretine eşittir.

$x^2+x+4 < 0$
 $\Delta = b^2-4ac = -15 \rightarrow$ kökler sanal

x	Yok
x^2+x+4	+

$G=\emptyset \rightarrow$ çünkü negatif olmasını istiyor.

⑦ $(x-1)^2 = x^2-2x+1 = (x-1)(x-1) \Rightarrow x_1=1 \quad x_2=1$

	1
$(x-1)$	- 0 +
$(x-1)$	- 0 +
x^2-2x+1 $(x-1)^2$	+ 0 +

* Gift katlı kök durumunda her yer a'nın işaretinin aynısıdır.
 $\neq ax^2+bx+c=0$

* $\Delta > 0$ ise İki gerçek kök var. İşaret kökler arası a'nın tersidir.

* $\Delta < 0$ ise Gerçek kök yok. İşaret her yerde a'nın aynısıdır.

* $\Delta = 0$ ise Gift kat kök var. İşaret a'nın işaretinin aynısıdır.

⑧ $x^2-4 > 0$
 $x(x^2-4) > 0$

x	-2	0	2
x	-	- 0 +	+
(x^2-4)	+	-	- 0 +
	+	-	+

⑨ $\frac{x^2+x+1}{x^2-x-3} < 0$
 $\Delta = b^2-4ac = 1-4 \cdot 1 = -3$ yok
 $-x^2-x+3=0$
 $\Delta = b^2-4ac = 1+12 = 13$
 $\sqrt{\Delta} \approx 3,5$

$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 3,5}{2}$
 $\frac{4,5}{2}$
 $\frac{-2,5}{2}$

x	$\frac{-2,5}{2}$	$\frac{4,5}{2}$
x^2+x+1	+	+
x^2-x-3	+	-
$\frac{x^2+x+1}{x^2-x-3}$	+	-

Gözüm

$$|x+2|=1$$

$$x+2=1 \Rightarrow \sqrt{(x+2)^2} = |x+2| = 1^2$$

$$x+2=-1 \Rightarrow \sqrt{(x+2)^2} = |x+2| = (-1)^2 = 1$$

$$x+2=1 \Rightarrow x=-1$$

$$x+2=-1 \Rightarrow x=-3$$

$$|x^2-3|=2$$

$$x^2-3=2 \Rightarrow x^2=5 \quad x_{1,2} = \pm\sqrt{5}$$

$$x^2-3=-2 \Rightarrow x^2=+1 \quad x_{3,4} = \pm 1$$

$$|x^2-1|=4 \quad G.K = \emptyset$$

$$|2-x| \leq 1$$

$$-1 \leq 2-x \leq 1$$

$$2-x \leq 1 \Rightarrow x-1 \geq 0$$

$$x-1=0 \Rightarrow x=1$$

$$-1 \leq 2-x \Rightarrow -x+3 \geq 0$$

$$-x+3=0 \Rightarrow x=3$$

		1	3
$x-1 \geq 0$	-	+	+
$-x+3 \geq 0$	+	+	-

G.K [1,3]
 $1 \leq x \leq 3$

$$|2-x| \geq 1$$

$$2-x \geq 1 \Rightarrow -x+1 \geq 0 \Rightarrow x=1$$

$$2-x \leq -1 \Rightarrow x-3 \geq 0 \Rightarrow x=3$$

		1	3
$-x+1 \geq 0$	+	0	-
$x-3 \geq 0$	-	-	+

G.K = $\emptyset$

$$|3-x| \leq x^2$$

$$-x^2 \leq 3-x \leq x^2$$

$$-x^2 \leq 3-x$$

$$x^2+x+3 \geq 0$$

$$x^2+x+3=0$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-12}}{2} \Rightarrow \text{sanal kök yok.}$$

$$3-x \leq x^2 \rightarrow x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+12}}{2}$$

$$x^2+x-3 \geq 0$$

$$x_3 = \frac{-1+\sqrt{13}}{2} \approx \frac{2.5}{2}$$

$$x_4 = \frac{-1-\sqrt{13}}{2} \approx \frac{-4.5}{2}$$

		$\frac{-4.5}{2}$	$\frac{2.5}{2}$
$x^2-x+3 \geq 0$	+	+	+
$x^2+x-3 \geq 0$	+	-	+

$-\infty \leq x \leq \frac{-4.5}{2}$ $\frac{2.5}{2} \leq x < +\infty$

$$\begin{cases} x+2 \leq 1 \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \text{ çözüm. k. bulunuz.}$$

$$x+2 \leq 1 \rightarrow x+1 \leq 0 \rightarrow x = -1$$

$$x-1 \geq 0 \rightarrow x = 1$$

	-1	+
$x+1 \leq 0$	-	+
$x-1 \geq 0$	-	+

$$GK = \emptyset$$

$$\begin{cases} x^2 - x + 2 \leq 0 \\ x^2 - 1 \geq 0 \end{cases} GK = ?$$

$$x^2 - x + 2 \leq 0 \rightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-8}}{2} = 40k$$

$$x^2 - 1 \geq 0 \quad x_3 = +1 \quad x_4 = -1$$

x	-1	+
$x^2 - x + 2 \leq 0$	+	+
$x^2 - 1 \geq 0$	+	+

$$GK = \emptyset$$

$$|x-2| > |x+2|$$

$$\sqrt{(x-2)^2} > \sqrt{(x+2)^2}$$

$$(x-2)^2 > (x+2)^2$$

$$x^2 - 4x + 4 > x^2 + 4x + 4$$

$$-8x > 0$$

$$-8x = 0$$

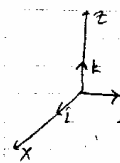
$$x = 0$$

	0
$-8x > 0$	+
$-\infty < x \leq 0$	+

$$\vec{A} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$\vec{A}(2, -3, 4)$$

$$\vec{B} = -\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k} \quad \vec{B}(-1, 2, -1)$$



$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$$

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = 1, \vec{j} \cdot \vec{j} = 1, \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = 0, \vec{j} \cdot \vec{k} = 0, \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$$

$$|\vec{A} - \vec{B}| = \sqrt{(\vec{A} - \vec{B}) \cdot (\vec{A} - \vec{B})}$$

$$= \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A} - 2\vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{B} \cdot \vec{B}}$$

$$= |\vec{A}|^2 - 2\vec{A} \cdot \vec{B} + |\vec{B}|^2$$

$$= 29 + 24 + 6 = 59 > 0$$

$$(\vec{A} - \vec{B}) \cdot (\vec{A} - \vec{B}) = 59$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 4^2}$$

$$= \sqrt{29}$$

$$|\vec{B}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-1)^2}$$

$$= \sqrt{6}$$

$$|\vec{A} - \vec{B}| = \sqrt{59}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}) \cdot (-\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k})$$

$$= 2\vec{i} \cdot (-\vec{i}) + (-3\vec{j}) \cdot 2\vec{j} + 4\vec{k} \cdot (-\vec{k})$$

$$= -2 - 6 - 4 = -12$$

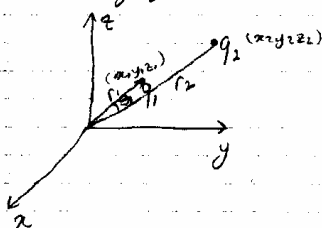
$$* (2\vec{A} - 4\vec{B}) \cdot (\vec{A} + 2\vec{B}) = 2\vec{A} \cdot \vec{A} + 2\vec{A} \cdot (2\vec{B}) - 4\vec{B} \cdot \vec{A} - 2\vec{B} \cdot 4\vec{B}$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{29} \quad = 2(\vec{A} \cdot \vec{A}) + 4(\vec{A} \cdot \vec{B}) - 4(\vec{B} \cdot \vec{A}) - 8(\vec{B} \cdot \vec{B})$$

$$|\vec{B}| = \sqrt{6} \quad = 2|\vec{A}|^2 - 8|\vec{B}|^2 = 2 \cdot 29 - 8 \cdot 6 = 58 - 48 = 10$$

$$\vec{r}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} \quad \vec{r}_1(x_1, y_1, z_1)$$

$$\vec{r}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k} \quad \vec{r}_2(x_2, y_2, z_2)$$



$$\vec{F} = k \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \cdot \vec{e}_r \quad |\vec{e}_r| = 1$$

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

$$r = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$$

$$* \vec{A} - \vec{B} = (2 - (-1))\vec{i} + (-3 - (-2))\vec{j} + (4 - (-1))\vec{k} = 3\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$$

$$|\vec{A} - \vec{B}| = \sqrt{9 + 1 + 25} = \sqrt{35}$$

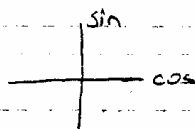
$$r = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

$$|\vec{r}_2| = 0 \text{ ise } |\vec{r}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$* \vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos \theta$$

$$-12 = \sqrt{29} \cdot \sqrt{6} \cdot \cos \theta$$

$$\cos \theta = -\frac{12}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{6}}$$



$$* \vec{a} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{1}{\sqrt{29}} (2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k})$$

$$* r_1, r_2 = |\vec{r}_1|, |\vec{r}_2| \cdot \cos \theta$$

$$x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} \cdot \cos \theta$$

$$\cos \theta = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

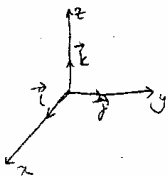
$$* \vec{A}, \vec{B} = \vec{C}$$

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{C}| = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin \theta$$

$$|\vec{B} \times \vec{A}| = |\vec{A} \times \vec{B}|$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

$$\vec{A} \times \vec{A} = 0$$



$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$$

$$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$

$$\begin{aligned} \vec{A} &= 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k} \\ \vec{B} &= -\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \end{aligned} \quad \vec{A} \times \vec{B} = (2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}) \times (-\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k})$$

$$= 0 + 4\vec{k} - 2\vec{j} + 3\vec{k} + 0 + 3\vec{i} + 2\vec{k} + 0$$

$$= 3\vec{i} - 2\vec{j} + 7\vec{k}$$

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = \sqrt{25 + 4 + 49} = \sqrt{78} = \sqrt{3 \cdot 26} = 5\sqrt{3}$$

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin \theta$$

$$5\sqrt{3} = \sqrt{4+9+1} \cdot \sqrt{1+4+1} \cdot \sin \theta$$

$$\frac{5\sqrt{3}}{5\sqrt{6}} = \sin \theta$$

$$\frac{5}{\sqrt{2}} = \sin \theta \Rightarrow \theta = \arcsin\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)$$

$$* \vec{A} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = (2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}) \cdot (3\vec{i} - 2\vec{j} + 7\vec{k}) = 10 - 3 - 7 = 0$$

$$\vec{B} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = (-\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}) \cdot (3\vec{i} - 2\vec{j} + 7\vec{k}) = -3 - 2 + 7 = 0$$

$$* \vec{A} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

$$\vec{B} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$$

$$* \vec{A} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$* \vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 5\vec{i} - 2\vec{j} + 7\vec{k}$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

$$\# (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = |\vec{A} \times \vec{B}|^2 = |\vec{A}|^2 |\vec{B}|^2 \sin^2 \theta$$

$$= |\vec{A}| |\vec{B}| \sin \theta = |\vec{A}| |\vec{B}|^2 (1 - \cos^2 \theta)$$

$$= |\vec{A}|^2 |\vec{B}|^2 - |\vec{A}|^2 |\vec{B}|^2 \cos^2 \theta = |\vec{A}|^2 |\vec{B}|^2 - |\vec{A} \cdot \vec{B}|^2$$

$$\text{yani } (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = |\vec{A}|^2 |\vec{B}|^2 - |\vec{A} \cdot \vec{B}|^2$$

$$|\vec{A} \times \vec{B}| \geq |\vec{A}| |\vec{B}| //$$

LİMİT

DİZİLER

$a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

a_0 ilk terim

a_n genel terim

Diziler bu genel terimle veya terimler arasındaki ilişkilerin özel durumuna göre adlandırılırlar veya bu diziyi ilk kez öğrenen matematiğin adıyla anılırlar.

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 $\rightarrow$ Fibonacci dizisi

1, 2, 2², 2³, ..., 2ⁿ, ... $a_n = 2^n \rightarrow$ geometrik dizi $\rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$

limit Eğer bir a_n dizisi verilmişse öyle bir r sayısı vardır ki bu r sayısı $n \gg N$ olduğu durumda $|a_n - r| < \epsilon$ olarak seçilirse çok büyük ancak pozitif her bir ϵ sayısı mevcutsa $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = r$ denir. Eğer bir r sayısı her durum için

tek ise (belirsiz değil ise) bu dizi yakınsaktır denir. Eğer dizi bu özelliği sağlamıyorsa bu dizi ıraksaktır denir.

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \rightarrow$ sıfır dizisi

Teoremi: Yakınsak bir dizinin bir ve yalnız bir limiti vardır.

Üst limit: Bir a_n dizisinin en büyük bir yığılma noktası varsa buna a_n dizisinin üst limiti denir. Yakınsak bir dizinin üst limiti ile alt limiti birbirine eşittir. Eğer eşit değilse bu dizi ıraksaktır.

Alt limit: Bir dizinin en küçük bir yığılma noktası varsa buna a_n dizinin alt limiti denir.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = r \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = p$$

$$\# \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = r + p$$

$$\# \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = r \cdot p$$

$$\# \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{r}{p} \quad p \neq 0$$

Monoton Artan dizi

her n için $a_{n+1} \geq a_n$

Monoton Azalan dizi

her n için $a_{n+1} \leq a_n$

$$1, \frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{1}{2}\right)^3, \dots, \left(\frac{1}{2}\right)^n, \dots$$

SONUÇLAR

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \text{ ise}$$

$$1- \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a| \quad 2- k \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{a}$$

$$3- \lim_{n \rightarrow \infty} \log a_n = \log a$$

$$\text{Her } \epsilon > 0 \text{ için } |a_n - a| < \epsilon \Rightarrow -\epsilon < a_n - a < \epsilon$$

$$a - \epsilon < a_n < a + \epsilon$$

$$|\log a_n - \log a| < \epsilon$$

$$|\log(a + \epsilon) - \log a| = \left| \log \frac{a + \epsilon}{a} \right| = \left| \log \left(1 + \frac{\epsilon}{a} \right) \right| < \epsilon$$

$$4) \text{Eğer } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L$$

$$a) a_n > b_n \text{ ise } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 2n - 1}{n^2 - 4} = \frac{n^2 \left(n - \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} \right)}{n^2 \left(1 - \frac{4}{n^2} \right)} = \frac{n - \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}}{1 - \frac{4}{n^2}} = \infty$$

b) $a_n = b_n$ ise derecelerin en büyüklelerinin katsayıları oranına eşit olur.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 2n - 1}{n^2 + 1} = \frac{n^2 \left(1 - \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} \right)}{n^2 \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)} = 1$$

$$c) a_n < b_n \text{ ise } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n + 3}{n^3 + n^2 + 1} = 0$$

$$5) a < 1 \text{ ise } \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$$

$$6) a > 0 \text{ reel } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = a^0 = 1$$

$$7) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

11

8) $a > 1$ olm üzere (a reel/sayı)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{a^n} = 0$$

Cıbbilic! $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ ise

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{3}}\right)^{\frac{n}{3}} \right]^3 = e^3$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{4n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{4n}\right)^{4n} \right]^{\frac{1}{4}} = e^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{e}$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{9n^2}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{1}{3n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^n \right] = \frac{1}{\sqrt[3]{e}} \cdot \sqrt[3]{e} = 1$$

$$d) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n =$$

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \frac{n+1+1}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)} = e \cdot 1 = e$$

$$e) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n-2}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{n-2}\right)^n \left(\frac{n+3}{n-2} = \frac{n-2+3+2}{n-2} = 1 + \frac{5}{n-2}\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{n-2}\right)^n \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{5}{n-2}\right)^2} \cdot \left(1 + \frac{5}{n-2}\right)^2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{n-2}\right)^{5(n-2)} \cdot \left(1 + \frac{5}{n-2}\right)^2 = e^5 \cdot 1 = e^5$$

$$f) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+2}{2n+1} \right)^{1/5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n+1} \right)^{\frac{2n+2}{5}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{2n+1} \right)^{2n} \right]^{\frac{1}{5}}$$

12

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\underbrace{\left(1 + \frac{1}{2n+1} \right)^{2n} \left(1 + \frac{1}{2n+1} \right)^1 \left(1 + \frac{1}{2n+1} \right)^{-1}}_{\left(1 + \frac{1}{2n+1} \right)^{2n+1}} \right]^{\frac{1}{5}} = (e \cdot 1)^{\frac{1}{5}} = e^{\frac{1}{5}}$$

$$g) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^n = a = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^n = \ln a = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n} \left[\ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) = \frac{1}{n} \cdot \frac{\ln e}{1} = \frac{1}{n} \rightarrow 0 //$$

$$\text{NOT: } \log a = 0$$

$$0 \log a \neq 0$$

$$\log a^0 = 0$$

$$\log 1 = 0$$

$$a = 1 \text{ o/mall}$$

$$h) \vec{r}_n = \left(1 + \frac{2}{n} \right)^{2n} \vec{i} + \left(\frac{3n-1}{3n+2} \right)^{2n} \vec{j} \quad \text{Is } \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{r}_n \right| = ?$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{r}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n} \right)^{2n} \vec{i} + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n-1}{3n+2} \right)^{2n} \vec{j}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n} \right)^{2n} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m} \right)^{4m} = e^4$$

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{m} \quad n = 2m$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n-1}{3n+2} \right)^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{3n+2} \right)^{2n} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{m} \right)^{2m-4/3} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{1}{m} \right)^{2m} \cdot \left(1 - \frac{1}{m} \right)^{-4/3} \right]$$

$$\frac{3}{3n+2} = \frac{1}{m}$$

$$3m = 3n+2$$

$$3m - 2 = 3n$$

$$n = m - \frac{2}{3}$$

$$\text{Bonus: } \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{r}_n = e^4 \vec{i} + \frac{1}{e^2} \vec{j}$$

$$\left| \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{r}_n \right| = \sqrt{e^4 \cdot e^4 + \frac{1}{e^2} \cdot \frac{1}{e^2}} = \sqrt{e^8 + \frac{1}{e^4}} = \frac{1}{e^2} \sqrt{e^{12} + 1}$$

— Sonuç —

13

1) Eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ise $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n} = a$

2- $a_n > 0$ ise $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ise $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \dots a_n} = a$

$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \dots a_n}$ ise

$\ln b_n = \ln(a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \dots a_n)^{\frac{1}{n}}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln a_1 + \ln a_2 + \dots + \ln a_n}{n} = \ln a \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$

Ö. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ ise

*) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} = e$ old. göster.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = a_n$ olsun.

$b_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \dots a_n} = \sqrt[n]{2 \cdot \frac{3^2}{2^2} \cdot \frac{4^3}{3^3} \cdot \frac{5^4}{4^4} \dots \frac{(n+1)^n}{(n)^n}}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = e$ $b_1 = \sqrt{2}$ $b_2 = \sqrt[2]{\frac{3^2}{2^2} \cdot 2}$ $b_3 = \sqrt[3]{3 \cdot \frac{4^3}{3^3} \cdot \frac{3^2}{2^2} \cdot 2}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2 \cdot \frac{3^2}{2^2} \cdot \frac{4^3}{3^3} \dots \frac{(n+1)^n}{(n)^n}} = \sqrt[n]{\frac{(n+1)^n}{2 \cdot 3 \cdot 4 \dots n}} = \sqrt[n]{\frac{(n+1)^n}{n!}} = \frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}}$

Ö. $a_1 = 1, a_n = \frac{n}{n-1} \quad n > 1$ olm. üzere $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ old. gösteriniz.

$b_n = \sqrt[n]{1 \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \dots \frac{n}{n-1}} = \sqrt[n]{n}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n-1} = 1$

$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1 \rightarrow a_n$ in limiti 1 ise a_n den gelen b_n in de limiti 1 dir.

Ö. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[4]{4} + \dots + \sqrt[n]{n}}{n \cdot \sqrt[n]{1 \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \dots \frac{3n}{2n+1}}} =$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{2n+1} = \frac{3}{2}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[4]{4} + \dots + \sqrt[n]{n}}{n \cdot \sqrt[n]{1 \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \dots \frac{3n}{2n+1}}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 [\ln(n^2-3) - \ln(n^2+1)]}{\sqrt{\ln 2} + \sqrt{\ln 3} + \sqrt[3]{\ln 4} + \sqrt[4]{\ln 5} + \dots + \sqrt[n]{\ln(n+1)}} = ?$$

14

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 [\ln(n^2-3) - \ln(n^2+1)]}{\sqrt{\ln 2} + \sqrt{\ln 3} + \sqrt[3]{\ln 4} + \dots + \sqrt[n]{\ln(n+1)}}$$

payda $a_n = \sqrt[n]{\ln(n+1)}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\ln(n+1)} = 1$ ise

↓
kural

pay $n^3 [\ln(n^2-3) - \ln(n^2+1)]$

$$n^3 \left[\ln \left(\frac{n^2-3}{n^2+1} \right) \right]$$

$$\ln \left[\left(\frac{n^2-3}{n^2+1} \right)^{n^3} \right] =$$

$$\frac{n^2-3}{n^2+1} = \left(1 - \frac{4}{n^2+1} \right)^{n^3} =$$

$$\left(1 - \frac{4}{n^2+1} \right)^{n^3} = \left(1 - \frac{4}{n^2+1} \right)^{n^2} \cdot \left(1 - \frac{4}{n^2+1} \right)^n = \left(1 - \frac{4}{n^2+1} \right)^{n^2} \cdot \left(1 - \frac{4}{n^2+1} \right)^n$$

$\frac{1}{m} = \frac{4}{n^2+1}$
 $n^2+1 = 4m$

$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4}{n^2+1} \right)^{n^2} = e^{-4} = e^{-4}$

$\ln e^{-4} = -4 \ln e$

-4

Sonuç: $-\frac{4}{1} = -4 //$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{2^2} + \frac{8^2}{3^2} + \frac{15^3}{4^2} + \dots + \frac{(n^2+2n)^n}{(n+1)^{2n}} \cdot \frac{1}{n}}{\ln(3^n-1) \cdot \frac{1}{n}}$$

↓ $\lim = 1$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln(3^n-1) =$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln 3^n \left(1 - \frac{1}{3^n} \right) =$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\ln(3^n) + \ln \left(1 - \frac{1}{3^n} \right) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} \ln 3^n + \frac{1}{n} \ln \left(1 - \frac{1}{3^n} \right) \right] =$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\ln 3 + \ln \left(1 - \frac{1}{3^n} \right) \right] = \ln 3 + 0 = \ln 3$

Sonuç $\frac{1}{\ln 3} //$

$\ln 1 = 0$ $1 - \frac{1}{3^n} = 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2+2n)^n}{(n+1)^{2n}} = \frac{[n^2(1+\frac{2}{n})]^n}{[n(1+\frac{1}{n})]^{2n}} = \frac{n^{2n} (1+\frac{2}{n})^n}{n^{2n} (1+\frac{1}{n})^{2n}} = \frac{(1+\frac{2}{n})^n}{(1+\frac{1}{n})^{2n}} = \frac{e^2}{e^2} = 1$$

KEL SERİLER

15

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$ toplamına seri denir. a_n serinin genel terimidir.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} c_1(n)r^{n+2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_2(n)r^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} c_3(n)r^n &= 0 \\ - \sum_{n=1}^{\infty} c_3(n)r^n &= \sum_{m=-1}^{\infty} c_3(m+2)r^{m+2} = c_3(1)r^1 + c_3(2)r^2 + \sum_{m=1}^{\infty} c_3(m+2)r^{m+2} \\ n=m+2 \quad n=1 \text{ için } m=-1 & \\ &= c_3(1)r + c_3(2)r^2 + \sum_{n=1}^{\infty} c_3(n+2)r^{n+2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - \sum_{n=1}^{\infty} c_2(n)r^{n+1} &= \sum_{m=0}^{\infty} c_2(m+1)r^{m+2} = c_2(1)r^2 + \sum_{m=1}^{\infty} c_2(m+1)r^{m+2} \\ h+1=m+2 \quad h=1 \text{ için } m=0 & \\ &= c_2(1)r^2 + \sum_{n=1}^{\infty} c_2(n+1)r^{n+2} \end{aligned}$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} c_1(n)r^{n+2} + c_3(1)r + c_3(2)r^2 + \sum_{n=1}^{\infty} c_3(n+2)r^{n+2} + c_2(1)r^2 + \sum_{n=1}^{\infty} c_2(n+1)r^{n+2} = 0$$

$$c_3(1)r + [c_3(2) + c_2(1)]r^2 + \sum_{n=1}^{\infty} [c_1(n) + c_2(n+1) + c_3(n+2)]r^{n+2} = 0$$

$$\begin{aligned} c_3(1) &= 0, \quad c_3(2) + c_2(1) = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} [c_1(n) + c_2(n+1) + c_3(n+2)] = 0 \\ c_1(1) + c_2(2) + c_3(3) &= 0 \\ c_1(2) + c_2(3) + c_3(4) &= 0 \end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = ?$$

S_n dizisi yakınsak ve $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ gibi sonlu bir sayıya gidiyorsa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi $\rightarrow$ yakınsaktır. Ve S de serinin toplamıdır.

S_n dizisinin iraksak olması halinde $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisine iraksak denir. $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ ise seriye sonsuz iraksak, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ mevcut değilse seriye belirsiz iraksak denir.

-DÖNÜŞ-

- c sbl. olm. üzere $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ serileri yakınsaksa

$\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$ serisi de yakınsaktır.

$$* \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S_1 \text{ ise } \sum_{n=1}^{\infty} c a_n = c S_1 = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n = c S_1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = S_1 + S_2$$

16

11 $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ serisini inceleyiniz.

$$= a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots + aq^n + \dots = a(1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n + \dots)$$

$$S_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1 - q}$$

$|q| < 1$ ise $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$

$|q| > 1$ ise $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \pm \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \pm \infty$$

12 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ serisinin yapısını belirleyiniz.

$$S_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$$

$$\frac{1}{k^2} = \frac{1}{k \cdot k} < \frac{1}{k(k-1)}$$

$$\frac{1}{k(k-1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k-1}$$

$$* = \frac{A(k-1) + Bk}{k(k-1)} = 1 = \frac{-A + k(A+B)}{k(k-1)}$$

$$\begin{aligned} -A &= 1 & A+B &= 0 \\ A &= -1 & A &= -1, B = 1 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{k(k-1)} = -\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1}$$

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$$

$$S_n < 1 + \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{3 \cdot 2} + \frac{1}{4 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n-1)}$$

$$< 1 + \left(-\frac{1}{2} + 1\right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1}\right)$$

$$S_n < 1 + 1 - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n < 2 - \frac{1}{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n < 2$$

NOT!

$$* \frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{Ax + A + Bx}{x(x+1)}$$

$$\frac{A + (A+B)x}{x(x+1)} = 1 = \frac{A + (A+B)x}{x(x+1)}$$

$$\begin{aligned} A &= 1 & A+B &= 0 & B &= -1 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

$$* \frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{Ax^2 + A + Bx^2 + Cx}{x(x^2+1)}$$

$$A + Cx + (A+B)x^2 = 1$$

$$\begin{aligned} A &= 1 & C &= 0 & A+B &= 0 & B &= -1 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{(x^2+1)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2 - \sqrt{n+1}) - (-\sqrt{n+1} - \sqrt{n})}{(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} = \underline{17}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n+2) - (n+1)]}{(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})} - \frac{[(n+1) - n]}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = a_n$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

$$\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{1}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{3}}$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$S_n = -\frac{1}{\sqrt{2} + 1} + \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\infty} \Rightarrow 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = -\frac{1}{(\sqrt{2} + 1)} = \frac{-\sqrt{2} + 1}{1} = 1 - \sqrt{2} //$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1+n^2-n^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2 - n^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2}{n^2(n+1)^2} - \frac{n^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$S_n = n=1 \text{ isin } \frac{1}{1} - \frac{1}{4}$$

$$n=2 \text{ isin } \frac{1}{4} - \frac{1}{9}$$

$$n=3 \text{ isin } \frac{1}{9} - \frac{1}{16}$$

$$n=4 \text{ isin } \frac{1}{16} - \frac{1}{25}$$

$$\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - 0 = 1 //$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = 1$$

$$\text{NOT: } \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{A}{n^2} + \frac{B}{(n+1)} + \frac{C}{(n+1)^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \rightarrow \text{yakin sak}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \rightarrow \text{iraksak}$$

① MUKAYESE TESTİ

18

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ pozitif terimli iki seri olsun. Herhangi bir $n > N$ için ① $a_n \leq b_n$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ serisi yakınsak ise

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi de yakınsaktır.

② $a_n \geq b_n$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ serisi ıraksak ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi de ıraksaktır.

Limit hali

1- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = M \neq 0$ ise her ikisinin de değeri aynıdır.

2- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ yakınsak ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi de yakınsaktır.

3- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ serisi ıraksak ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi de ıraksaktır.

Ö $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{n^4+2}$ serisinin değerini mukayese testi ile bulunuz.

1.yol $\frac{n^2-1}{n^4+2} < \frac{n^2}{n^4+2} < \frac{n^2}{n^4} = \frac{1}{n^2} \rightarrow$ yakınsak

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ yakınsak olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{n^4+2}$ de yakınsaktır.

2.yol $\frac{\frac{n^2-1}{n^4+2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2(n^2-1)}{n^4+2} = \frac{n^4-n^2}{n^4+2} = 1 \neq 0$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ yakınsak olduğu için $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{n^4+2}$ yakınsaktır.

Ö $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} > \frac{1}{\sqrt{n(n+n)}} = \frac{1}{\sqrt{2n}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow$ ıraksak

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ıraksak ise $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ de ıraksaktır.

② ORAN TESTİ

19

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitif terimli bir seri olsun. N bir doğal sayı olsun

$n > N$ için

1- $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq k < 1$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsaktır.

2- $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi ıraksaktır.

Limit hali

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

1) $L < 1$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsaktır.

2) $L > 1$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ " ıraksaktır.

3) $L = 1$ ise bir değere büyük değerlerle yaklaşırsa seri ıraksaktır, küçük değerlerle yaklaşırsa serinin yapısı hakkında bir şey söylenemez. Zaman yapacağımız başka testlere müracaat etmektir. Bu durumda müracaat edebileceğimiz alt testlerden biri de RABBE TESTİ'dir. Burada $R_n = n(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n})$ durumu düzenlenir. eğer

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n > 1$ ise yakınsaktır.

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n < 1$ ise ıraksaktır.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+1}{n+3} e^{-n}$$

$$a_n = \frac{2n^2+1}{n+3} e^{-n} \quad a_{n+1} = \frac{2(n+1)^2+1}{(n+1)+3} e^{-(n+1)}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n^2+4n+3}{n+4} e^{-(n+1)} \cdot \frac{n+3}{2n^2+1} e^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n^2+4n+3)(n+3)}{(n+4)(2n^2+1)} e^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e} < 1$$

yakınsaktır.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)!}{n! \cdot 3^n}$$

$$a_n = \frac{(n+3)!}{n! \cdot 3^n} \quad a_{n+1} = \frac{(n+1+3)!}{(n+1)! \cdot 3^{n+1}}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+4)!}{(n+1)! \cdot 3^{n+1}} \cdot \frac{n! \cdot 3^n}{(n+3)!} = \frac{n+4}{n+1} \cdot \frac{3^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} < 1 \text{ yakınsaktır.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}$$

$$a_{n+1} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3(n+1)-1)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2(n+1)-1)} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1) \cdot (3n+2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) \cdot (2n+1)}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1) \cdot (3n+2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) \cdot (2n+1)} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+2}{2n+1} = \frac{3}{2} > 1 \text{ ıraksaktır.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

20

$$a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)!^2}{(2(n+1))!} = \frac{(n+1)!^2}{(2n+2)!}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!^2}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{4n^2} = \frac{1}{4} < 1 \text{ yakınsak}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n} \quad a_n = \frac{2^n \cdot n!}{n^n} \quad a_{n+1} = \frac{2^{n+1} (n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1} (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2^n \cdot n!} = \frac{(2n+2) \cdot n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{2(n+1) \cdot n^n}{(n+1)^n (n+1)} = \frac{2n^n}{(n+1)^n} = 2 \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = 2 \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2 \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{2}{e} < 1 \text{ yakınsaktır.}$$

③ CAUCHY KÖK TESTİ

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitif terimli bir seri olsun. ve $n > N$ için;

1. $\sqrt[n]{a_n} < k < 1$ ise seri yakınsaktır.

2. $\sqrt[n]{a_n} > 1$ ise seri ıraksaktır.

limit hali

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = k \text{ olsun}$$

1. $k < 1$ ise seri yakınsaktır.

2. $k > 1$ ise seri ıraksaktır.

3. $k = 1$ ise serinin limiti 1'e üstten veya alttan yaklaşıp yaklaşmadığına bakılır veya başka bir testle seri incelenir.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^{n+1}}$$

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{3^n \cdot n!}{n^{n+1}}} = \frac{3}{n} \sqrt[n]{n!}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \cdot \frac{1}{\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}} = \frac{3}{e} > 1 \text{ ıraksaktır.}$$

NOT

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} \left(\frac{n}{n+3} \right)^{n^2}$$

21

$$a_n = e^{-n} \cdot \left(\frac{n}{n+3} \right)^{n^2} \quad \sqrt[n]{a_n} = a_n^{\frac{1}{n}} = e^{-1} \left(\frac{n}{n+3} \right)^n = \frac{1}{e} \left(\frac{n+3-3}{n+3} \right)^n$$

$$= \frac{1}{e} \left(1 - \frac{3}{n+3} \right)^n = \frac{1}{e} \left(1 - \frac{3}{n+3} \right)^{n+3} \left(1 - \frac{3}{n+3} \right)^{-3}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e} \left(1 - \frac{3}{n+3} \right)^{n+3} \cdot \left(1 - \frac{3}{n+3} \right)^{-3} = \frac{1}{e} (e^{-3}) \cdot 1 = \frac{1}{e^4} < 1 \quad \text{yakınsak}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{\frac{n^3-1}{-n^3+3}}$$

$$a_n = 2^{\frac{n^3-1}{-n^3+3}} \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} = a_n^{\frac{1}{n}} = 2^{\frac{\frac{n^3-1}{-n^3+3}}{n}} = 2^{\frac{n^3-1}{-n^3+3n}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{n^3-1}{-n^3+3n}} = 2^{-1} = \frac{1}{2} < 1 \quad \text{yakınsaktır}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^{n(n+1)}$$

$$a_n = \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^{n(n+1)}$$

$$\sqrt[n]{a_n} = a_n^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1+1-1}{n+2} \right)^{n+1} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+2} \right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+2} \right)^{n+2} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+2} \right)^{-1} = \frac{1}{e} \cdot 1 = \frac{1}{e} < 1$$

Rakete
2. Etap

0

yakınsaktır

#TÜREV#

-HIZ-

$$V = \frac{x}{t}$$

$$\bar{V} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

$$x = x(t)$$

$$x_1 = x(t_1)$$

$$x_2 = x(t_2)$$

$$\bar{V} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$$

$$\Rightarrow t_2 = \Delta t + t_1$$

$$\Delta t \ll 1$$

$$\bar{V} = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{(t + \Delta t) - t}$$

$$(\Delta t)^2 \approx 0$$

$$\frac{d}{dt} x = t$$

$$x(t) = t$$

$$V = \frac{(t + \Delta t) - t}{t + \Delta t - t} = \frac{\Delta t}{\Delta t} = 1$$

ör $x = a \cdot t + b$

$$v = \frac{a(t+\Delta t) + b - (at+b)}{t+\Delta t - t} = \frac{a\Delta t}{\Delta t} = a$$

22

ör $x = t^2$

$$v = \frac{(t+\Delta t)^2 - t^2}{t+\Delta t - t} = \frac{t^2 + 2t\Delta t + \underbrace{(\Delta t)^2}_{\Delta t^2 \approx 0} - t^2}{\Delta t} = \frac{2t\Delta t}{\Delta t} = 2t //$$

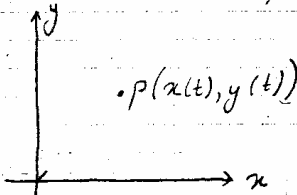
ör $x = t^n$

$$v = \frac{(t+\Delta t)^n - t^n}{\Delta t} = \frac{t^n + n\Delta t t^{n-1} + 0 - t^n}{\Delta t} \approx n t^{n-1}$$

ör $x = 3t^4 + 6t^3 + 5t^2 + b$

$$v = 12t^3 + 18t^2 + 10t + 0$$

ör

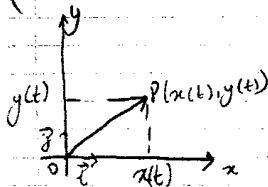


$$v_x = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{(t+\Delta t) - t}$$

$$v_y = \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{(t+\Delta t) - t}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

* $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} = \vec{OP}$



$$\vec{v} = \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{(t+\Delta t) - t}$$

$$\vec{v} = \frac{[x(t+\Delta t) - x(t)]\vec{i} + [y(t+\Delta t) - y(t)]\vec{j}}{(t+\Delta t) - t}$$

$$\vec{v} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{t+\Delta t - t} \vec{i} + \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{(t+\Delta t) - t} \vec{j}$$

$$v = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} \quad v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

ör $\vec{r} = 3t^2\vec{i} + (6t+5)\vec{j} \quad t=2$ de bu noktanın hızı nedir.

$\vec{v} = 6t\vec{i} + 6\vec{j} \quad t=2 \rightarrow v = 12\vec{i} + 6\vec{j}$

$$v = \sqrt{12^2 + 6^2} = \sqrt{180} //$$

23
 (b) $x = 3 \sin 2t$ $A = 3$ $\omega = 2 = 2\pi f$ $f = \frac{1}{\pi}$ $T = \pi$

$$V = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{(t+\Delta t) - t} = \frac{3 \sin 2(t+\Delta t) - 3 \sin 2t}{\Delta t} \Rightarrow \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$V = \frac{3 \sin 2t \cos 2\Delta t + 3 \sin 2\Delta t \cos 2t - 3 \sin 2t}{\Delta t} \Rightarrow \sin a \approx a \quad a \ll 1$$

$$V = \frac{3 \sin 2t \cdot 1 + 3 \cdot 2\Delta t \cos 2t - 3 \sin 2t}{\Delta t} \Rightarrow \cos a \approx 1 \quad a \ll 1$$

$$2\Delta t \ll 1$$

$$\cos 2\Delta t \approx 1$$

$$\sin 2\Delta t \approx 2\Delta t$$

$$V = 6 \cos 2t = 3(2 \cos 2t)$$

$$x = 6 \sin 8t \Rightarrow V = 48 \cos 8t$$

(c) $x = t^2 \cos 4t$

$$V = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{(t+\Delta t)^2 \cos 4(t+\Delta t) - t^2 \cos 4t}{\Delta t}$$

$$V = \frac{(t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2) [\cos 4t \cos 4\Delta t - \sin 4t \sin 4\Delta t] - t^2 \cos 4t}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t \ll 1 \quad \Delta t^2 \approx 0$$

$$\cos 4\Delta t \approx 1$$

$$\sin 4\Delta t \approx 4\Delta t$$

$$V = \frac{(t^2 + 2t\Delta t) [\cos 4t - 4\Delta t \sin 4t] - t^2 \cos 4t}{\Delta t}$$

$$V = \frac{t^2 \cos 4t - 4\Delta t t^2 \sin 4t + 2t\Delta t \cos 4t - 2t\Delta t^2 \sin 4t - t^2 \cos 4t}{\Delta t}$$

$$V = \frac{2t \cos 4t - 4t^2 \sin 4t}{\Delta t} = (t^2)' \cos 4t + t^2 (\cos 4t)'$$

$$* x = t^2 \cos 4t \quad \text{ise} \quad V = (t^2)' \cos 4t + t^2 (\cos 4t)'$$

(d) $x = (t^3 + t^2 + 1) \cos 3t$

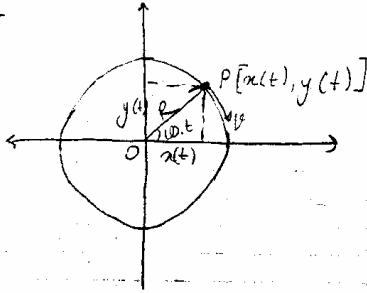
$$x' = (3t^2 + 2t) \cos 3t + (t^3 + t^2 + 1) (-3 \sin 3t)$$

- iVME - $a = \frac{V_2 - V_1}{t_2 - t_1}$ $V = V(t)$

$$a = \frac{V(t+\Delta t) - V(t)}{(t+\Delta t) - t} \quad \Delta t \ll 1$$

(e) $V = t^3 \sin 2t$

$$a = (t^3)' \sin 2t + (t^3) (\sin 2t)' = 3t^2 \sin 2t + t^3 (2 \cos 2t)$$



$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

24

$$x(t) = R \cos \omega t$$

$$y(t) = R \sin \omega t$$

$$\vec{OP} = \vec{r}(t) = R \cos \omega t \vec{e}_x + R \sin \omega t \vec{e}_y$$

$$\vec{v} = \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = -R\omega \sin \omega t \vec{e}_x + R\omega \cos \omega t \vec{e}_y$$

$$\vec{a} = \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = -R\omega^2 \cos \omega t \vec{e}_x - R\omega^2 \sin \omega t \vec{e}_y$$

$$\vec{r} \cdot \vec{v} = -R\omega \cos \omega t \sin \omega t + R\omega \cos \omega t \sin \omega t$$

$$\vec{r} \cdot \vec{v} = 0$$

Bu sonuç bize değişimin değiştiği şeyin o noktadaki teğetinin eğimini verir.

$$r = |\vec{r}| = R$$

$$v = |\vec{v}| = R\omega$$

$$a = |\vec{a}| = R\omega^2 = \frac{R\omega^2 R}{R} = \frac{v^2}{R} \quad \vec{a} = -\omega^2 \vec{r}$$

$$\downarrow$$

$$F = m \cdot a \rightarrow F = m \frac{v^2}{r}$$

gezegenler: $F = G \cdot \frac{mM}{R^2}$

atomlar: $F = k \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{R^2}$

FONKSİYON

1. Bu kavramın zamana göre sürekliliğinin sağlanması yanında değişimin de sürekliliğinin sağlanması gerekir.

2. Bu fonksiyon tanımımız böyle olmalıdır ki değişim sonrası sürekli kılması yanında zamana göre değişim öncesi de sürekli olarak sağlanması gerekir.

3. Bu değişimin böyle durumlarda aynı kalmasını sağlayacak işlemlere de açık olması gerekir.

$$0 \quad x = 3 \sin(t^3 + 2t^2 + 1)$$

$$\frac{dx}{dt} = 3 \cdot (3t^2 + 4t) \cdot \cos(t^3 + 2t^2 + 1)$$

$$0 \quad x = 2 \sin^3(t^4 + 1)$$

$$x = 2[\sin(t^4 + 1)]^3$$

$$\frac{dx}{dt} = 2 \cdot (4t^3) \cdot \cos(t^4 + 1) \cdot 3 \sin^2(t^4 + 1) = 6 \cdot (4t^3) \cdot \cos(t^4 + 1) \cdot \sin^2(t^4 + 1)$$

$$0 \quad x = (t^2 + 1)^4 \cdot \sin^3(t^3 + 1)$$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 4 \cdot (2t) \cdot (t^2 + 1)^3 \cdot \sin^3(t^3 + 1) + (t^2 + 1)^4 \cdot 3 \cdot (3t^2) \cdot \cos(t^3 + 1) \cdot \sin^2(t^3 + 1) \\ &= \sin^2(t^3 + 1) \cdot (t^2 + 1)^3 \left[8t \sin(t^3 + 1) + 9t^2(t^2 + 1) \cdot \cos(t^3 + 1) \right] \end{aligned}$$

$$0 \quad x = 2 \sin 3t$$

$$\dot{x} = 6 \cos 3t$$

$$\ddot{x} = -18 \sin 3t = -9x$$

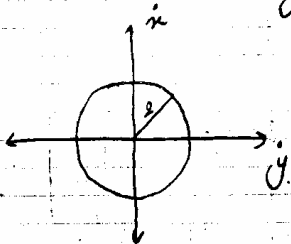
$$m \ddot{x} = -9mx \Rightarrow m \ddot{x} + 9mx = 0 \Rightarrow \ddot{x} + 9x = 0 //$$

$$ma = -9mx \Rightarrow \underline{\underline{F = -9mx}} \Rightarrow \boxed{F = -\omega^2 m x}$$

$$\boxed{a = -\omega^2 x}$$

$$0 \quad \begin{aligned} x &= \cos 2t & \dot{x} &= -2 \sin 2t \\ y &= \sin 2t & \dot{y} &= 2 \cos 2t \end{aligned}$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 4 \sin^2 2t + 4 \cos^2 2t = 4$$



Doğrusal denklem gözümüleri öngö-
rülebilir olmaları yanında faz uzayın-
daki resimleri de (çelcikler) aynı yö-
rüngeler olur.

$$0 \quad \begin{aligned} x &= \sin^3 4t \\ y &= \cos^3 4t \end{aligned} \quad y' = \frac{dy}{dx} = ? = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{-12 \sin 4t \cos^2 4t}{+12 \cos 4t \sin^2 4t} =$$

$$\frac{dx}{dt} = 3 \cdot 4 \cdot \cos 4t \sin^2 4t = 12 \cos 4t \sin^2 4t \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-\cos 4t}{\sin 4t} = -\cot 4t$$

$$\frac{dy}{dt} = -3 \cdot 4 \sin 4t \cdot \cos^2 4t$$

$$x^3 + y^3 = 4 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y' = ?$$

27

$$3x^2 + 3(y')y^2 = 0$$

$$y' = -\frac{3x^2}{3y^2} = -\frac{x^2}{y^2}$$

$$y'' = \frac{-2xy^2 - 2y'yx^2}{y^4} = -\frac{2xy^2 + 2\frac{x^2}{y^2}x^2}{y^4} = -\frac{2xy^4 + 2x^4}{y^6}$$

$$x^4 + y^4 = x^2y \quad y' = ?$$

$$4x^3 + 4y'y^3 = 2xy + x^2y'$$

$$4y'y^3 - x^2y' = 2xy - 4x^3$$

$$y'(4y^3 - x^2) = 2xy - 4x^3$$

$$y' = \frac{2xy - 4x^3}{4y^3 - x^2}$$

$$x^4 + y^4 = \cos(x^2 + y^2) \quad y' = ?$$

$$4x^3 + 4y'y^3 = -(2x + 2y'y) \cdot \sin(x^2 + y^2)$$

$$4y'y^3 + 2yy'\sin(x^2 + y^2) = -2x\sin(x^2 + y^2) - 4x^3$$

$$y' = -\frac{2x\sin(x^2 + y^2) + 4x^3}{4y^3 + 2y\sin(x^2 + y^2)}$$

$$x^2y + xy^2 = 2 \quad P(1,1) \quad \text{noktasındaki teget ve normal denklemlerini yazınız.}$$

$$m = y' \Rightarrow 2xy + x^2y' + y^2 + x2yy' = 0$$

$$y' = \frac{-(2xy + y^2)}{x^2 + 2xy} \quad m = -\frac{3}{3} = -1$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = -1(x - 1)$$

$$\Rightarrow y - 1 = -x + 1 \Rightarrow y = -x + 2 \rightarrow \text{Teget denk.}$$

$$m \cdot m' = -1$$

$$m' = +1$$

$$y - 1 = 1(x - 1)$$

$$y = x \rightarrow \text{normal denk.}$$

Ö $x^3 \cdot y^2 + x^2 \cdot y^3 = 4$ kapalı eğrisinin $P(1, -1)$ noktasındaki teğet ve normal denklemlerini bulunuz. 28

$$m = y'$$

$$3x^2 \cdot y^2 + 2y' \cdot y \cdot x^3 + 2x \cdot y^3 + 3y' \cdot y^2 \cdot x^2 = 0$$

$$3x^2 y^2 + 2xy^3 = -2y'y - 3y'y^2 x^2$$

$$= y'(-2y - 3y^2 x^2)$$

$$y' = \frac{3x^2 y^2 + 2xy^3}{-2y - 3y^2 x^2} = -1 \quad m = -1$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$m_{\perp} = +1$$

$$y + 1 = -1(x - 1)$$

$$y + 1 = 1(x - 1)$$

$$\boxed{y = -x} \rightarrow \text{Teğet denklemleri}$$

$$\boxed{y = x - 2} \rightarrow \text{Normal denklemleri}$$

Ö $y = \sqrt[3]{t^2 + 1}$
 $x = \sqrt[3]{t^2 + t + 1}$

$$t = 1 \text{ için } \frac{dy}{dx} = ?$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} =$$

$$y = (t^2 + 1)^{\frac{1}{3}} \quad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{3} \cdot 2t \cdot (t^2 + 1)^{-\frac{2}{3}}$$

$$x = (t^2 + t + 1)^{\frac{1}{3}} \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{3} \cdot (2t + 1) \cdot (t^2 + t + 1)^{-\frac{2}{3}}$$

$$y' = \frac{\frac{1}{3} \cdot 2t \cdot (t^2 + 1)^{-\frac{2}{3}}}{\frac{1}{3} \cdot (2t + 1) \cdot (t^2 + t + 1)^{-\frac{2}{3}}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot (2 \cdot 2) \cdot (2^2 + 1)^{-\frac{2}{3}}}{\frac{1}{3} \cdot (3) \cdot (3)^{-\frac{2}{3}}} = \frac{2^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{1}{3}}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$$

Fiziksel Farklı Bir Diğer Anlamı

* $x' = x + a$ dönüşüm (öteleme)

$$x = x + 0$$

$$F = F(x)$$

$$dx + a = x + (0 + da)$$

$$dF = \frac{d(F)}{dx} \cdot dx = dx \frac{dF}{dx}$$

$$dx = da$$

$$dF = da \cdot \frac{dF}{dx} \quad P \equiv \frac{d}{dx} \rightarrow \text{momentum}$$

* $t' = t + a$

$$D_t \equiv \frac{d}{dt}$$

enerji

TERS FONKSİYONLAR

• $y = f(x)$ ise $y = f^{-1}(x)$ fonksiyonu $f(x)$ 'in tersi olan fonksiyondur.

• $y = 2x + 1 = f(x)$ ise $x = \frac{1}{2}(y - 1)$ $y = \frac{1}{2}(x - 1) = f^{-1}(x)$

$$\begin{aligned} \text{• } y &= \frac{x+1}{x-2} & xy - 2y &= x+1 & y &= f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{x-1} \\ & & xy - x &= 2y+1 & & \\ & & x(y-1) &= 2y+1 & & \\ & & x &= \frac{2y+1}{y-1} & & \end{aligned}$$

• Trigonometrik Fonksiyonlar:

* $y = f(x) = \sin x \Rightarrow x = \sin^{-1}(y)$
 $y = f^{-1}(x) = \sin^{-1}(x) = \arcsin x$

$y = \arcsin u(x)$

$\sin y = u(x)$

$y' \cos y = u'(x)$

$y' = \frac{u'(x)}{\cos y}$

$\sin^2 y + \cos^2 y = 1$

$\cos^2 y = 1 - \sin^2 y$

$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$

• $y' = \frac{u'(x)}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \boxed{\frac{u'(x)}{\sqrt{1 - u^2(x)}}} = y'$

• $y = \arcsin 2x$

$y' = \frac{u'(x)}{\sqrt{1 - u^2}} = \frac{2}{\sqrt{1 - 4x^2}}$

* $y = \arccos x$

$y = \arccos u(x)$ ise

$\cos y = u(x)$

$-y' \sin y = u'(x)$

$y' = -\frac{u'(x)}{\sin y} = -\frac{u'(x)}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} =$

$y' = -\boxed{\frac{u'(x)}{\sqrt{1 - u^2(x)}}}$

$$y = \arccos(x^2 + 1)$$

$$y' = -\frac{2x}{\sqrt{1-(x^2+1)^2}} = -\frac{2x}{\sqrt{1-(x^2+1)^2}}$$

$$* y = \operatorname{arctg} u(x) \text{ ise } \tan y = u(x)$$

$$\frac{y'}{\cos^2 y} = u'(x)$$

$$y' = u'(x) \cdot \cos^2 y$$

$$\Rightarrow \frac{\sin^2 y + \cos^2 y}{\cos^2 y} = 1$$

$$y' = u'(x) \cdot \frac{1}{1 + \tan^2 y}$$

$$\tan^2 y + 1 = \frac{1}{\cos^2 y}$$

$$\boxed{y' = \frac{u'(x)}{1 + u^2(x)}}$$

$$\cos^2 y =$$

$$y = \operatorname{arctg}(\sin x)$$

$$y' = \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x}$$

$$* y = \operatorname{arccotg} u(x)$$

$$y = \operatorname{cotg}(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$y = \operatorname{cotg} u$$

$$y' = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'(x)$$

$$y' = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\operatorname{cotg} y = u(x)$$

$$\frac{y'}{\sin^2 y} = u'(x)$$

$$\frac{\cos^2 y + \sin^2 y}{\sin^2 y} = 1$$

$$y' = -u'(x) \cdot \sin^2 y$$

$$\operatorname{cotg}^2 y + 1 = \frac{1}{\sin^2 y}$$

$$y' = -u'(x) \cdot \frac{1}{1 + \operatorname{cotg}^2 y} = \boxed{-\frac{u'(x)}{1 + u^2(x)} = y'}$$

$$y = x \cdot \arctg(x^2)$$

$$y' = \arctg(x^2) + x \cdot \frac{2x}{1+x^4} = \arctg(x^2) + \frac{2x^2}{1+x^4}$$

$$y = x^2 \cdot \arcsin(x^2+1) \quad x=0 \text{ noktasındaki teğet denklemini}$$

$$x=0 \quad y=0 \cdot \arcsin 1$$

$$\arcsin 1 = x$$

$$\sin x = 1$$

$$y = 0 \cdot \frac{\pi}{2} = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2} \rightarrow \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$

$$P(0,0)$$

$$y' = 2x \cdot \arcsin(x^2+1) + x^2 \cdot \frac{2x}{\sqrt{1-(x^2+1)^2}} \quad ? 0$$

$$m = 0$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$\boxed{y=0} \rightarrow \text{teğet denklemini}$$

$$y = \arcsin^3(x+1)$$

$$y' = 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(x+1)^2}} \cdot \arcsin^2(x+1)$$

$$y = x \cdot \arctg(x^2)$$

$$y' = 1 \cdot \arctg(x^2) + x \cdot 2 \cdot \frac{2x}{1+x^4} \cdot \arctg(x^2)$$

$$= \arctg(x^2) \left[\arctg(x^2) + \frac{4x^2}{1+x^4} \right]$$

$$y = \arcsin(x^2) \quad x=1 \text{ noktasındaki teğet}$$

$$\arcsin 1 = k \rightarrow \sin k = 1 \quad k = \frac{\pi}{2}$$

$$y = \frac{\pi}{2} \quad y' = \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{0} = \infty \quad m = \tan \alpha \Rightarrow \alpha = 90^\circ$$

$-y$ eksenine $P(1, \frac{\pi}{2})$ noktasında paraleldir.

$$y = \arctg^3 4x \quad x = \frac{1}{4} \text{ noktasındaki teğet ve normal denkl. bulunur}$$

$$x = \frac{1}{4} \text{ için } y = \arctg^3 4 \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow \arctg = 1 \quad \tan t = 1 \quad t = \frac{\pi}{4} \Rightarrow y = \left(\frac{\pi}{4}\right)^3$$

$$P\left(\frac{1}{4}, \left(\frac{\pi}{4}\right)^3\right) \quad y' = 3 \cdot \frac{4}{1+16x^2} \cdot \arctg^2 4x \quad m = \frac{12}{(1+16 \cdot \frac{1}{16})^2} \cdot \arctg^2 4x = \frac{6}{1} \cdot \left(\frac{\pi}{4}\right)^2$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) = y - \left(\frac{\pi}{4}\right)^3 = 6 \cdot \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \cdot \left(x - \frac{1}{4}\right) \quad \text{İ.D.} \quad y - \left(\frac{\pi}{4}\right)^3 = -\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \cdot \left(x - \frac{1}{4}\right) \Rightarrow N.D.$$

MAX ve MIN

32

$$y=f(x)$$

$$V=V(x)$$

$$\delta V=0$$

$$1) y=2x-3$$

$$y'=2 > 0$$

x	$-\infty$	$+\infty$
y	$-\infty$	$+\infty$
y'	+	

artan bir fonksiyondur.

$$2) y=x^2-x-3$$

$$y'=2x-1$$

$$2x-1=0$$

$$x=\frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
y	$+\infty$		$+\infty$
y'	-	0	+

min

$$3) y=x^3-2x^2+x+1=V(x)$$

$$y'=3x^2-4x+1$$

$$3x^2-4x+1=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4.(3).1=4 > 0 \text{ (2 tane gercek kök var)}$$

$$x_1=\frac{1}{3}, x_2=1$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	1	$+\infty$
y	$-\infty$			$+\infty$
y'	+	0	0	+

max

min

* max $\rightarrow$ kararlı nokta

* min $\rightarrow$ kararlı nokta

$$4) y=x^3$$

$$y'=3x^2$$

$$3x^2=0$$

$$x_1=x_2=0 \rightarrow \text{çift katlı kök}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y	$-\infty$		$+\infty$
y'	+	0	+
y''	-	0	+

$$V(x)=x^3$$

$$y''=6x=0$$

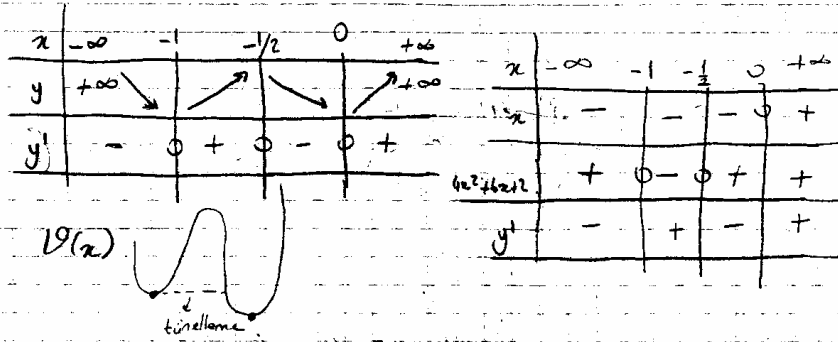
$$x=0$$

dönme noktası

$$y = x^4 + 2x^3 + x^2 + 2$$

$$y' = 4x^3 + 6x^2 + 2x = x(4x^2 + 6x + 2) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = -\frac{1}{2} \quad x_3 = -1$$



2. Türev

$$y = f(x)$$

$$y' = f'(x)$$

$$y'' = f''(x)$$

* $y' = f'(x) = 0 \rightarrow$ Dönüm ve bütün noktalarını verir.

$f''(x) > 0$ ise kontavlık içe doğru $\cup$ olur.

$f''(x) < 0$ ise kontavlık dışı doğru $\cap$ olur.

* İkinci türevin kökü x ise

$$f''(x_1) > 0 \rightarrow x_1 \text{ min olur}$$

$$f''(x_1) < 0 \Rightarrow x_1 \text{ max olur.}$$

$$y = x^2 - x - 4$$

$$y' = 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$y'' = 2 \quad x = \frac{1}{2} \text{ min olur.}$$

$$y = x^3 - x^2 + 1$$

$$y' = 3x^2 - 2x = 0$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = \frac{2}{3}$$

$$y''(0) = 6 \cdot 0 - 2 = -2 < 0 \Rightarrow \text{max}$$

$$y''\left(\frac{2}{3}\right) = 6 \cdot \frac{2}{3} - 2 = 2 > 0 \Rightarrow \text{min}$$

$$y'' = 6x - 2 = 0$$

$$x = \frac{1}{3} \rightarrow \text{bütün noktası}$$

34
 1) İki pozitif sayının toplamı 16 ise bunların çarpımının max olması için sayılar ne olmalıdır?

$$x+y=16$$

$$S=x \cdot y$$

$$y=16-x$$

$$S=x \cdot (16-x)$$

$$S=16x-x^2$$

$$S'=16-2x=0$$

$$x=8$$

$$y=8$$

$$S''=-2 < 0 \text{ max}$$

$$S=8 \cdot 8=64$$

2) İki pozitif sayının toplamı 12 ise bunların kareleri toplamının min olması için bu sayılar ne olmalıdır?

$$x+y=12$$

$$y=12-x$$

$$S=x^2+y^2$$

$$S=x^2+(12-x)^2$$

$$=x^2+144+x^2-24x$$

$$=2x^2-24x+144$$

$$S'=4x-24=0$$

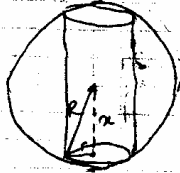
$$x=6$$

$$y=6$$

$$S=36+36=72$$

$$S''=4 > 0 \text{ min} \rightarrow \text{sayılar 6'dır}$$

3) Yarısı 2 olan bir düre içine yerleştirilebilen yarı yüz alanı max olan dik dairesel silindiri bulunuz.



$$S=2\pi r \cdot 2x=4\pi rx$$

$$x^2+r^2=R^2$$

$$R^2-x^2=r^2 \Rightarrow r=\sqrt{R^2-x^2}$$

$$S=4\pi x\sqrt{R^2-x^2}$$

$$S'=4\pi \left[\sqrt{R^2-x^2} + x \cdot \frac{1}{2}(-2x) \cdot \frac{1}{\sqrt{R^2-x^2}} \right]$$

$$S'=\frac{R^2-2x^2}{\sqrt{R^2-x^2}}$$

$$S''=-4x\sqrt{R^2-x^2} \cdot (R^2-x^2)^{-3/2}$$

$$= \frac{-4x(-2x) \cdot \frac{1}{\sqrt{R^2-x^2}}}{R^2-x^2}$$

$$x=\frac{R}{\sqrt{2}} \text{ yazılır}$$

ve max olur.

$$\frac{R^2}{2}+r^2=R^2 \Rightarrow r=\frac{R}{\sqrt{2}}$$

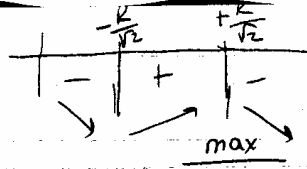
$$S=4\pi \cdot \frac{R}{\sqrt{2}} \cdot \frac{R}{\sqrt{2}}=2\pi R^2$$

$$x=\pm \frac{R}{\sqrt{2}}$$

2. yal

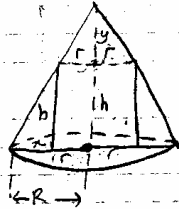
$$f' = \frac{R^2 - 2x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

$$x_1 = -\frac{R}{\sqrt{2}} \quad x_2 = \frac{R}{\sqrt{2}}$$



35

Bir kline, verilen bir dik dairesel silindir yerleştirilebilecek minimum hacimli dik dairesel koni bulunuz.



$$V_{\text{koni}} = \frac{1}{3} \pi (x+r)^2 (h+y)$$

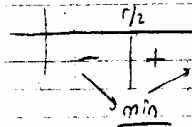
$$\frac{y+h}{y} = \frac{x+r}{r} \Rightarrow y = \frac{r \cdot h}{x}$$

$$V = \frac{1}{3} \pi (x+r)^2 \left(h + \frac{r \cdot h}{x}\right) = \frac{1}{3} \pi (x+r)^2 h \left(\frac{x+r}{x}\right)$$

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot h \cdot \frac{(x+r)^3}{x}$$

her biriyor $V' = \frac{1}{3} \pi h \cdot \left[\frac{3x(x+r)^2 (x+r)^3}{x^2} \right] = 0$

$$\frac{(x+r)^2 [3x(x+r)]}{x^2} = \frac{(x+r)^2 (2x-r)}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \frac{r}{2}$$



$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot h \cdot \left(\frac{3r}{2}\right)^3 / \frac{r}{2}$$

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot h \cdot \frac{3^3 \cdot r^2}{2^2} = \pi h \left(\frac{3r}{2}\right)^2$$

" $y = ax^2 - x - 12$ eğrisinin $x=1$ noktasında $y=2x-1$ doğrusuna değmesi için a parametresini bulun ediniz

$$2x-1 = ax^2 - x - 12$$

$$x=1 \text{ için } 2 \cdot 1 = a \cdot 1 - 1 - 12$$

$$1 = a - 13$$

$$a = 14$$

- a=1 için grafiği çiziniz.

36

1. $y = x^2 - x - 12$

(1) $-\infty, +\infty$

2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$

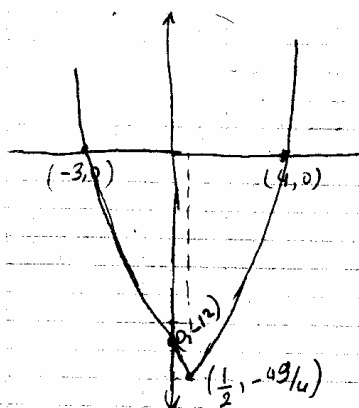
3) $y' = 2x - 1 = 0$

$x = \frac{1}{2} \rightarrow y = -\frac{49}{4} \quad \left(\frac{1}{2}, -\frac{49}{4}\right) \text{ min} \Rightarrow y'' = 2 > 0$

4) $x = 0 \Rightarrow y = -12$

$y = 0 \Rightarrow (x-4)(x+3) = 0 \Rightarrow x_1 = 4 \quad x_2 = -3$

x	$-\infty$	-3	0	$\frac{1}{2}$	4	$+\infty$
y'		-	0	+		
y''		+		+		
y	$+\infty$	0	-12	$-\frac{49}{4}$	0	$+\infty$



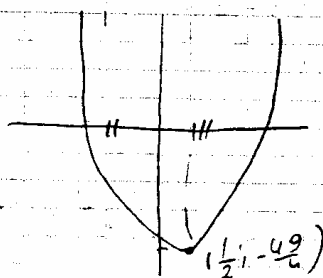
2. $y = x^2 - x - 12 \quad y = x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 12 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} \Rightarrow T = \left(\frac{1}{2}, -\frac{49}{4}\right)$

$y + \frac{49}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$

$y + \frac{49}{4} = Y \quad x - \frac{1}{2} = X$

$Y = X^2$

$X \rightarrow -X' \Rightarrow Y = X'^2$



II) $y = 4x - ax^3$ eğrisinin $y = -x + 1$ doğrusuna $x=2$ noktasındaki teğetinin dik olabilmesi için $a=?$ 37

$$y' = 4 - 3ax^2 \Rightarrow x=2 \text{ için } m = 4 - 12a$$

$$y = -x + 1 \rightarrow m = -1 \rightarrow m' = +1 \quad \begin{cases} 1 = 4 - 12a \\ 12a = 3 \\ a = \frac{1}{4} \end{cases}$$

- $a=1$ için bu fonksiyonun grafiğini çiziniz

$$y = 4x - x^3$$

$$1-) (-\infty, +\infty)$$

$$y(+\infty, -\infty)$$

$$2-) y' = 4 - 3x^2 = 0 \text{ için } x_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad x_2 = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$y'' = -6x = 0$$

$$x=0$$

$$M_1\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, y_1\right) \text{ max}$$

$$y''\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) < 0 \text{ max}$$

$$M_2\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, y_2\right) \text{ min}$$

$$y''\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) > 0 \text{ min}$$

$$3-) x=0 \text{ için } y=0$$

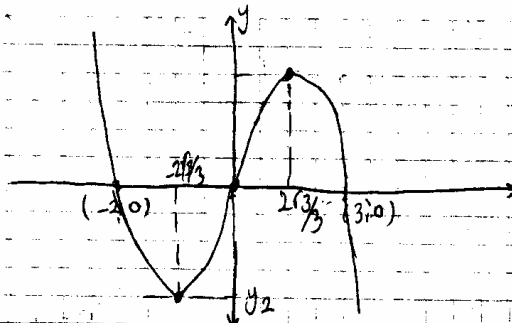
$$y=0 \text{ için } 4x - x^3 = 0 \Rightarrow x_3 = 0 \quad x_4 = 2 \quad x_5 = -2$$

Teğ mi? Gift mi?

$$x \rightarrow -x \quad y \rightarrow 4(-x) - (-x)^3 = -4x + x^3 = -y \quad \text{TEK FONK.}$$

(eksenine göre)

x	$-\infty$	-2	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$+\infty$
y'		-	0	+	0	+	
y''		+		+	0	-	
y	$+\infty$	0	y_2	0	y_1	0	$-\infty$
			min		max		



38

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 1 \rightarrow y = 1$ asintot

$$y' = \frac{1 \cdot (x-3) - 1 \cdot (x+1)}{(x-3)^2} = \frac{-4}{(x-3)^2} \quad \text{töl. yok}$$

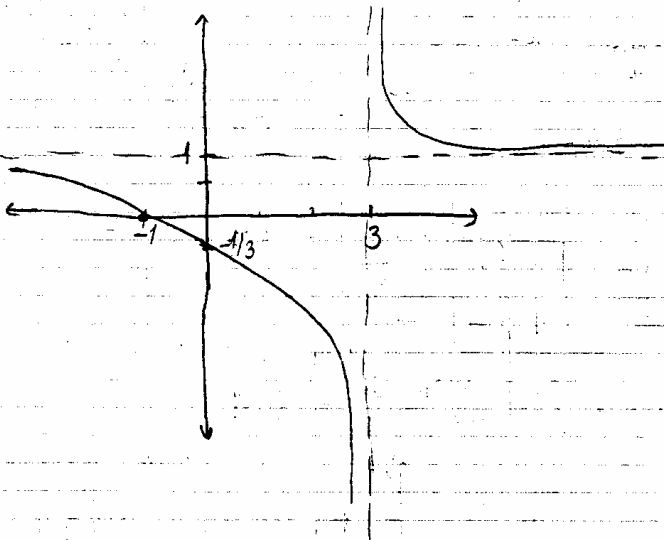
$y' < 0$ azalón

Özel noktalar

$$x=0 \Rightarrow y = -1/3$$

$$y=0 \Rightarrow x=-1$$

x	$-\infty$	-1	0	3	$+\infty$
y'		$-$			$-$
y''		$-$		$+$	
y	1	0	$-\frac{1}{3}$	$+\infty$	1



Ö $y = ax^2 + bx - 8$ fonksiyonunun $P(1, -9)$ noktasındaki teğetinin x eksenine paralel olması için

a) a ve b ne olmalıdır?

b) Fonksiyonun grafiğini çiziniz.

a) $-9 = a + b - 8$
 $-1 = a + b$

$m = 0$ olmalı $\Rightarrow y' = 2ax + b$ $x = 1$ için $2a + b = 0$

$a + b = -1$
 $2a + b = 0$

$a = 1, b = -2$

b) $y = x^2 - 2x - 8 = x^2 - 2x + 1 - 1 - 8$

1.yol $y = (x - 1)^2 - 9$

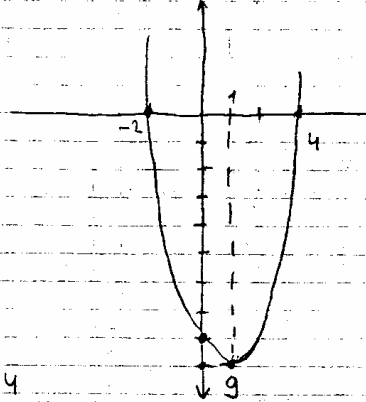
$y + 9 = (x - 1)^2$

$y + 9 = X$

$x - 1 = X$

$Y = X^2$
 $(1, 9)$

Özel noktalar $\Rightarrow x = 0$ için $y = -8$
 $y = 0$ için $x = -2, 4$



2.yol

x	$-\infty$	-2	0	1	4	$+\infty$
y'	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
y''	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
y	$+\infty$	-8	-9	-9	0	$+\infty$

$\min$

$y' = 2x - 2 = 0$ için $x = 1$

$y'' = 2 > 0$ sürekli pozitif

Ö $y = ax^3 + bx$ fonksiyonunun $P(1, +3)$ noktasındaki teğetinin eğiminin 1 olabilmesi için (x eksenine ile 45° yapabilmesi için)

a) a ve b ?

b) a ve b için grafiği çiziniz.

a) $3 = a + b$ ve $m = 1$ için $y' = 1 = 3ax^2 + b$ olmalı
 $x = 1$ için $1 = 3a + b$

$3a + b = 1$

$a + b = 3$

$a = -1, b = 4$

Özel durum

$y = 0 \Rightarrow x = 0, +2, -2$

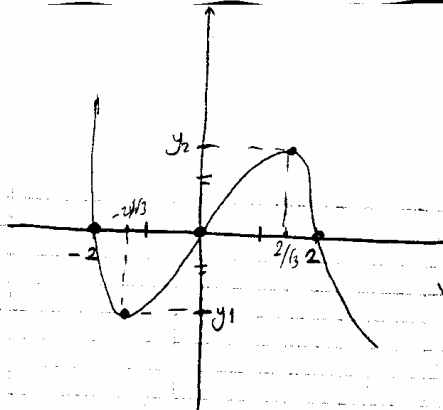
$y' = -3x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}$

$y'' = -6x = 0 \Rightarrow x = 0$

b)

x	$-\infty$	-2	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	$+2$	$+\infty$
y'	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
y''	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$
y	$+\infty$	-12	$-\frac{8}{3}$	0	$\frac{8}{3}$	12	$+\infty$

$\max$



$$y = \frac{2x^2}{x^2 - 1} = \frac{2x^2}{(x-1)(x+1)} \Rightarrow \text{AİFT FONKSİYON}$$

(x veya $-x$ koyarsan değişmez)

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 2$ Yatay asimtot

$$x = \pm 1 \text{ Düşey asimtot}$$

$$y' = \frac{4x \cdot (x^2 - 1) - 2x \cdot (2x^2)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{4x^3 - 4x - 4x^3}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2} = 0 \text{ için}$$

$$x = 0 \text{ olur}$$

$$y = 0 \text{ olur}$$

x	$-\infty$	-1	0	$+1$	$+\infty$
y'	$+$	$ $	$+$	$-$	$-$
y	$2 \nearrow$	$ $	$\nearrow 0$	$\searrow$	2

max

